Fiche 3 bis

Exercice 1. Exemples de bases duales

1. Dans $\mathbb{R}^3$, quelle est la base duale de la base canonique ?
2. Et quelle est la base duale de la base $((1,0,0),(0,1,0),(1,0,1))$?
3. Dans cette question on fixe $n \geq 1$ et on note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. On fixe également un réel a.

   Pour chaque k entier naturel, on note φ_k la forme linéaire définie sur E par $\varphi_k(P) = \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}$.

   (a) Justifier que $(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$ est une base de E.

   (b) Justifier que la famille $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ est la base duale de la base écrite au (a).

Exercice 2. Interaction de la dualité et de l'orthogonalité
Soit E un espace euclidien de dimension notée n, de produit scalaire noté $\langle , \rangle$.
On note Θ l'application de E vers E^* définie comme suit :

pour chaque x et chaque y de E, on pose $[\Theta(x)](y) = \langle x, y \rangle$.

1. Vérifier que Θ est une application linéaire.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(\Theta) = \{0\}$ et en déduire que Θ est bijective.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension p. On considère :

$$G = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in F,\, \varphi(x) = 0\}.$$

   Montrer que $G = \Theta(F^\perp)$ et en déduire la dimension de G.

Exercice 3. Groupe orthogonal en dimension 2.
On note $O_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille 2×2. Le but de l'exercice est de les expliciter.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer qu'il existe un réel θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$.

   (b) Montrer que le vecteur $(d, -b)$ est colinéaire au vecteur (a, c).

   (c) Montrer que A est nécessairement d'une des deux formes suivantes :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que $O_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.
3. Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Montrer que R_θ et $R_{\theta'}$ commutent. Les élements de $O_2(\mathbb{R})$ commutent-ils entre eux ?
4. On se place dans un plan euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$.

   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Interpréter géométriquement les endomorphismes r_θ et s_θ ayant pour matrices respectives R_θ et S_θ dans la base $\mathcal{B}$.

   (b) Montrer que le produit de deux réflexions s_θ et s_φ est une rotation. Obtient-on ainsi toutes les rotations ?

Exercice 4. Groupe spécial orthogonal en dimension 2 et nombres complexes
Dans cet exercice, on dira qu'une matrice-colonne (2,1) X est vecteur propre d'une matrice carrée (2,2) M lorsqu'il existe un λ complexe tel que $MX = \lambda X$ et $X \neq 0$ (autrement dit quand X est vecteur propre de l'endomorphisme de l'espace des matrices-colonnes $(2,1)$ qui associe MC à une colonne C).
On note H l'ensemble des matrices carrées réelles $(2,2)$ de déterminant 1 et dont $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ est un vecteur propre.

1. Montrer que H est un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

2. Vérifier qu'une matrice réelle $(2,2)$ admet $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ pour vecteur propre si et seulement si elle est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ pour des réels a et b.
3. En utilisant l'exercice précédent, montrer que H est égal au groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien.

1. On suppose que $u \in \mathbf{End}(E)$ est un endomorphisme orthogonal.
   (a) Quelle peut être la valeur du déterminant de u ?
   (b) Quelles sont les valeurs propres (nécessairement réelles) de u ?
2. Quelles sont les projections orthogonales qui sont des endomorphismes orthogonaux ?
3. Quelles sont les symétries orthogonales qui sont des endomorphismes orthogonaux ?

Exercice 6. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Démontrer les équivalences suivantes :

u est orthogonal $\iff$ pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est orthogonale
$\iff$ il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est orthogonale.

Exercice 7. Soit E un espace euclidien de dimension n. Pour g endomorphisme de E, on notera :

$$\mathrm{Fix}(g) = \{x \in E \mid g(x) = x\}.$$

1. Soit g un endomorphisme orthogonal de E et soit a un vecteur tel que $g(a) \neq a$.
   On note H l'hyperplan orthogonal à $g(a) - a$ puis σ la symétrie orthogonale par rapport à H.
   (a) Montrer que $\sigma\,[g(a) - a] = a - g(a)$.
   (b) Montrer que $a + g(a) \in H$ et en déduire que $\sigma\,[a + g(a)] = a + g(a)$.
   (c) Montrer que $\sigma[g(a)] = a$.
   (d) Montrer que $\mathrm{Fix}(g) \subset H$, et en déduire que $\mathrm{Fix}(g) \subset \mathrm{Fix}(\sigma \circ g)$.
   (e) Montrer que $\mathrm{Fix}(g) \subsetneq \mathrm{Fix}(\sigma \circ g)$.
2. Soit f un endomorphisme orthogonal de E.
   En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une famille $(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ de symétries hyperplanes, avec $p \leq n$, pour lesquelles :

$$\mathrm{Fix}(\sigma_p \circ \cdots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ f) = E$$

   puis montrer que $f = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_p$.