# Fiche 3

**Exercice 1. Endomorphisme adjoint.** Soit $v$ un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On note $v^* \in \mathbf{End}(E)$ l'unique endomorphisme de $E$ tel que, pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\langle v^*(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle$. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(v^*) = (\mathrm{Im}\ v)^\perp \text{ et } \mathrm{Im}(v^*) = (\mathrm{Ker}\ v)^\perp .$$

En déduire que $\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(v^*)$.

**Exercice 2.** On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel. On définit l'application linéaire

$$T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array}$$

1. Montrer que $T$ est un endomorphisme autoadjoint.
2. On remplace désormais le produit scalaire usuel par le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   L'endomorphisme $T$ est-il autoadjoint pour ce produit scalaire ? Si non, déterminer l'adjoint de $T$.

**Exercice 3.** On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_1[X]$ du produit scalaire défini par

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

Déterminer l'adjoint de l'endomorphisme de dérivation $\delta : P \in E \longmapsto P'$.

**Exercice 4.** Soit $u$ un endomorphisme d'un espace euclidien $E$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$.
2. En déduire que $\mathrm{rang}(u^* \circ u) = \mathrm{rang}(u) = \mathrm{rang}(u \circ u^*)$.
3. Comparer $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Im}(u^* \circ u)$.

**Exercice 5. Endomorphisme symétrique.** Soit $u$ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $E$. On rappelle que $u$ est donc diagonalisable. On suppose que, pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$. Quelles sont les valeurs propres possibles de $u$ ? En déduire que $u$ est l'endomorphisme nul.

**Exercice 6.** Soit $u$ un endomorphisme d'un espace euclidien $E$. Démontrer les équivalences suivantes :

$u$ est orthogonal $\iff$ pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de $E$, la matrice de $u$ dans $\mathcal{B}$ est orthogonale
$\iff$ il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est orthogonale.

et

$u$ est autoadjoint $\iff$ pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de $E$, la matrice de $u$ dans $\mathcal{B}$ est symétrique
$\iff$ il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est symétrique.

**Exercice 7.** On se place dans un espace euclidien $E$ de dimension 3. Soit $u$ un endomorphisme orthogonal de $E$ tel que $\det(u) = 1$.

1. Montrer que $u$ admet au moins une valeur propre (nécessairement réelle).

2. Montrer que 1 est une valeur propre de $u$. Est-ce forcément la seule ?
3. Soit $e_1$ un vecteur propre de $u$ associé à la valeur propre 1 de norme 1.
   (a) Justifier l'existence d'une base orthonormée $(e_1, e_2, e_3)$ de $E$ prolongeant $e_1$.
   (b) Quelle forme a la matrice de $u$ dans cette base ?

**Exercice 8.** Soit $E$ un espace euclidien.

1. On suppose que $u \in \mathbf{End}(E)$ est un endomorphisme orthogonal.
   (a) Quelle peut être la valeur du déterminant de $u$ ?
   (b) Quelles sont les valeurs propres (nécessairement réelles) de $u$ ?
2. Quelles sont les projections orthogonales qui sont des endomorphismes orthogonaux ?
3. Quelles sont les symétries orthogonales qui sont des endomorphismes orthogonaux ?

**Exercice 9. Groupe orthogonale en dimension 2.** On note $O_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille $2 \times 2$. Le but de l'exercice est de les expliciter.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel $\theta$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$.
   (b) Montrer que le vecteur $(d, -b)$ est colinéaire au vecteur $(a, c)$.
   (c) Montrer que $A$ est nécessairement d'une des deux formes suivantes :
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
2. En déduire que $O_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.
3. Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Montrer que $R_\theta$ et $R_{\theta'}$ commutent. Les élements de $O_2(\mathbb{R})$ commutent-ils entre eux ?
4. On se place dans un plan euclidien $E$ muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$.
   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Interpréter géométriquement les endomorphismes $r_\theta$ et $s_\theta$ ayant pour matrices respectives $R_\theta$ et $S_\theta$ dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Montrer que le produit de deux réflexions $s_\theta$ et $s_\varphi$ est une rotation. Obtient-on ainsi toutes les rotations ?

**Exercice 10.** Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthornormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Déterminer la nature, et préciser les éléments caractéristiques, de l'endomorphisme $f$ de $E$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est donnée par
$$A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 11.** Soient $a$ et $b$ deux réels. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour quels $a, b \in \mathbb{R}$ a-t-on $A$ orthogonale ?
2. Dans ce cas, préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A$.

**Exercice 12.** On considère $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $u$ est autoadjoint. Justifier l'existence, puis expliciter une matrice $P$ orthogonale pour laquelle $P^{-1}AP$ est diagonale.

**Exercice 13.** On considère la matrice symétrique

$$B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer $B^2$ et en déduire que $B$ est orthogonale. Justifier l'existence puis déterminer une matrice $Q$ orthogonale pour laquelle $Q^{-1}BQ$ est diagonale.

**Exercice 14.** Soient $E$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, $a$ un vecteur unitaire de $E$ et $k$ un réel.

1. Montrer que $f(x) = x + k\langle x, a\rangle a$ définit un endomorphisme symétrique de $E$.
2. Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de $f$.

**Exercice 15.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN).$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme $\Phi$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = {}^tAMA + AM{}^tA.$$

Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme autoadjoint. $\Phi$ est-il diagonalisable ?