Fiche 1

Exercice 1 (Formes sur $\mathbb{R}^2$) Les applications suivantes définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?

(a) $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2}$;

(b) $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 4x_1y_1 - x_2y_2$;

(c) $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 10x_2y_2$.

Exercice 2 (Formes bilinéaires) Soient a_{ij} des réels $(i, j = 1, 2)$ et soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tous $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha x_1y_1 + \beta x_1y_2 + \gamma x_2y_1 + \delta x_2y_2.$$

(a) Montrez que φ est une forme bilinéaire.

(b) A quelle condition φ est-elle symétrique ?

(c) Donnez la matrice de φ dans la base canonique.

(d) On suppose φ symétrique. Quelle est la forme quadratique associée à φ ?

(e) On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = 2$, $\delta = 2a$ et $\beta = \gamma = 1$. À quelle condition sur a est-ce que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3 (Formes quadratiques)

(a) On considère l'application $q : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 \end{array} \right.$. Trouver une forme bilinéaire symétrique φ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $q(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. En déduire que $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$.

(b) Même question que précédemment avec $q : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1x_2 \end{array} \right.$.

Exercice 4 (Formules de polarisation) Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire. Montrer les trois formules de polarisations :

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Montrer que $\|\cdot\|$ vérifie l'identité du parallélogramme, *i.e.*

$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Exercice 5 (Produits scalaires) Les applications suivantes définissent-elles des produits scalaires sur les espaces vectoriels considérés ? Si oui, (et lorsque cela a un sens) préciser si la base canonique de l'espace vectoriel considéré est orthogonale pour ce produit scalaire.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application φ définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application ψ définie sur $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))^2$ par :

$$\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \quad \psi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB).$$

(c) On note $E = \mathcal{C}([-1;1];\mathbb{R})$ et on considère l'application définie par

$$\forall f, g \in E, \quad b(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)\underset{\cdot}{\mathrm{t}}.$$

Exercice 6 (Matrices de produits scalaires) Les deux questions sont indépendantes.

(a) On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire φ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$ est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\varphi(2X-1, X^2+1)$.

(b) Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et A la matrice d'un produit scalaire sur E dans une base de E. Montrer que A est inversible.

Exercice 7 (Changement de base $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.) Soit $E = \mathbb{R}^2$ avec la base canonique $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2\}$. On définit une forme bilinéaire φ sur $\mathbb{R}^2$ par la formule

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4y_1x_2 + 5y_1y_2.$$

Soit $\mathcal{B}'$ la base formée des vecteurs $f_1 = (1,1)$ et $f_2 = (1,-1)$.

(a) Expliciter M, la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$.

(b) Calculer la matrice de la forme φ dans la base $\mathcal{B}'$ de deux façons différentes :

1. en calculant $\varphi(f_i, f_j)$ pour tous $i, j \in \{1,2\}$;
2. en calculant la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}'$ et en utilisant la formule $M' = {}^tPMP$.

Exercice 8 (Coordonnées dans une base orthonormale) Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base d'un espace euclidien $(E, <,>)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est orthonormale si, et seulement si, pour tout $x \in E$ la coordonnée de x selon b_i est $< x, b_i >$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exercice 9 (Bases orthonormales) Soit $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace euclidien. On considère une famille $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ constituée d'éléments de E de norme 1. On suppose que pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i \rangle^2.$$

(a) Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est une famille orthogonale.

(b) Soit $x \in E$, montrer que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i \rangle b_i$.

(c) En déduire que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 10 (Une condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité) Soit E un espace vectoriel euclidien et x, y deux éléments de E. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x + \lambda y\| \geq \|x\|.$$

Exercice 11 (Familles indépendantes infinies) On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}\left([0;1], \mathbb{R}\right)$ muni du produit scalaire usuel :

$$\forall f, g \in E, \quad \varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application $h_n : t \in [0;1] \longmapsto \cos(2\pi n t)$.

(a) Montrer que la famille d'applications $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

(b) En raisonnant par l'absurde, montrer que l'espace vectoriel E n'est pas de dimension finie.

Exercice 12 (Cauchy-Schwarz) Soient A et B deux matrices $n \times n$ symétriques. Montrer que

$$(\mathrm{tr}(AB))^2 \leq \mathrm{tr}(A^2) \cdot \mathrm{tr}(B^2).$$

Exercice 13 (Cauchy-Schwarz) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer pour tout $f \in \mathcal{C}([a;b], \mathbb{R})$ on a

$$\left(\int_a^b |f(t)|dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f(t)^2 dt.$$

Préciser le cas d'égalité.
Indication : Identifier $\int_a^b |f(t)|dt$ à un produit scalaire entre deux fonctions bien choisies.

Exercice 14 (Cauchy-Schwarz) Soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels.

(a) Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^n x_k^2$$

et étudier les cas d'égalité.

(b) On suppose en outre que $x_k > 0$ pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2$$

et étudier les cas d'égalité.

Exercice 15 (Application de Cauchy-Schwarz) Soient a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle\, ,\, \rangle)$, k un réel et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application déterminée par

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = \langle x,y\rangle + k\langle x,a\rangle\langle y,a\rangle.$$

Montrer que φ est un produit scalaire si et seulement si $k > -1$.