Algèbre 4 - Cours 9
Introduction à la géométrie affine

Printemps 2023

Table des matières

1 Notations

Idée. Considérer la structure *affine* des espaces vectoriels. On veut entre autres pouvoir parler de droites / plans etc. qui ne passent pas forcément par l'origine, avoir des critères pour dire quand des points d'un espace sont alignés / coplanaires, quand est-ce que des droites ou des plans sont parallèles etc.

Terminologie. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En géométrie affine :

- les éléments de E sont appelés *points* – on les représentera en général par des lettres majuscules (A, B, $M\ldots$) ;
- si A et B sont deux points de E, on désigne par $\overrightarrow{AB}$ le *vecteur* $B - A$ – on représentera en général les vecteurs par des lettres minuscules, souvent surmontées d'une flèche ($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{j}\ldots$)

Remarque. Quand on travaille dans un espace vectoriel sans parler de géométrie affine, points et vecteurs sont synonymes et désignent les éléments de E. En géométrie affine on fait la différence (cette différence est plus claire quand on fait de la géométrie affine abstraite ou l'espace des points n'est pas forcément un espace vectoriel en soi).

Avec les notations précédentes, on a :

- $A = B \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = 0$,
- $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$,
- $B = A + \overrightarrow{u} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$,
- $\forall A, B, C \in E$ on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (reation de Chasles),
- Généralement, on note O l'élément 0 de E.

Définition 1.1. Soit $\overrightarrow{u}$ un élément de E. L'application de E dans E définie par $M \mapsto M + \overrightarrow{u}$ est appelée *translation* de vecteur $\overrightarrow{u}$. On la note $t_{\overrightarrow{u}}$.

Remarque. Si $\overrightarrow{u} \neq 0$ alors $t_{\overrightarrow{u}}$ n'est PAS une application linéaire (puisque $t_{\overrightarrow{u}}(0) = \overrightarrow{u} \neq 0$).

Proposition 1.2.

- *La composée de deux translation est une translation. Plus précisément pour tout $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$, on a*
$$t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{u}}.$$
- *La translation $t_{\overrightarrow{u}}$ est bijective de réciproque $t_{-\overrightarrow{u}}$.*
- *La translation $t_{\overrightarrow{u}}$ est l'identité si et seulement si $\overrightarrow{u} = 0$.*

En particulier, l'ensemble des translations $t_{\overrightarrow{u}}$ avec $\overrightarrow{u} \in E$ forme un groupe.

Démonstration. Trivial. Détails : exo (revenir à la définition). □

2 Sous-espaces affines

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 2.1. Une partie $\mathcal{F}$ de E est un sous-espace affine de E s'il existe un point Ω de E et un sous-espace vectoriel F de E tel que
$$\mathcal{F} = \Omega + F = \{\Omega + \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \in F\}.$$

On dit alors que $\mathcal{F}$ est le *sous-espace affine de E passant par Ω et dirigé par F.*

Remarques. On verra que le sous-espace F est unique mais le point Ω ne l'est pas (n'importe quel point de $\mathcal{F}$ ferait l'affaire). Le sous-espace affine $\mathcal{F}$ comme ci-dessus est l'image de l'espace vectoriel F par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$, ou (d'après la proposition suivante) par n'importe quel $\overrightarrow{A\Omega}$ avec $A \in \mathcal{F}$.

Proposition 2.2. *Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace affine de E passant par un point Ω et dirigé par un sous-espace vectoriel F. Pour tout $A \in \mathcal{F}$ on a*
$$\mathcal{F} = A + F \quad \text{et} \quad F = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in \mathcal{F}\}.$$

En particulier F est uniquement déterminé par $\mathcal{F}$.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{F}$. Alors par définition il existe $\overrightarrow{u} \in F$ tel que $A = \Omega + \overrightarrow{u}$. Pour tout point M de $A + F$ il existe $\overrightarrow{v} \in F$ tel que
$$M = A + \overrightarrow{v} = \Omega + \underbrace{(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})}_{\in F} \in \mathcal{F}.$$

D'où $A + F \subseteq \mathcal{F} = \Omega + F$. De manière similaire, comme $\Omega = A - \overrightarrow{u}$, pour tout $M \in \mathcal{F}$, il exite $\overrightarrow{v} \in F$ tel que
$$M = \Omega + \overrightarrow{v} = A + \underbrace{(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u})}_{\in F} \in A + F,$$

donc $\mathcal{F} \subseteq A + F$. D'où l'égalité.

D'après ce qui précède, $\mathcal{F} = A + F$, donc pour tout $M \in \mathcal{F}$ il existe $\overrightarrow{u} \in F$ tel que $M = A + \overrightarrow{u}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u} \in F$. Donc $\{\overrightarrow{AM} \mid M \in \mathcal{F}\} \subseteq F$. Réciproquement, si $\overrightarrow{u} \in F$, alors le point $M := A + \overrightarrow{u}$ appartient à $A + F = \mathcal{F}$. Donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM}$ avec $M \in \mathcal{F}$. D'où $\{\overrightarrow{AM} \mid M \in \mathcal{F}\} = F$. □

Définition 2.3. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E. On appelle *direction* de $\mathcal{F}$ l'unique espace vectoriel F de E tel que pour tout $A \in \mathcal{F}$ on ait $\mathcal{F} = A + F$.

Exemples.

(a) Tout sous-espace vectoriel de E est un sous-espace affine (il est sa propre direction et passe par l'origine).

(b) Un sous-espace affine est un sous-espace vectoriel si et seulement si il contient O.

Droites et plans

1. Une partie $\mathcal{D}$ de E est une *droite affine* s'il existe un point A et un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ tels que $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u} = \{A + \lambda\overrightarrow{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. On dit que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ (ou que $\mathcal{D}$ est dirigée par $\overrightarrow{u}$).
2. Si A et B sont deux points distincts de E, il existe une unique droite affine, notée (AB), passant par A et B : c'est la droite passant par A et dirigée par $D = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB})$.
3. Trois points A, B, C sont alignés (c'est-à-dire appartiennent à une droite affine) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont proportionnels.

   Démonstration.
   - Si A, B, C sont alignés, alors il appartiennent à une même droite affine $\mathcal{D}$, et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ appartiennent à la direction de $\mathcal{D}$ qui est une droite vectorielle.
   - Réciproquement, supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ (quitte à changer B en C on peut toujours se ramener à cette situation). Si $A = B$ alors les trois points sont confondus. Si $A \neq B$ alors C appartient à la droite (AB) puisque $C = A + \lambda\overrightarrow{AB}$. Dans les deux cas les trois points sont alignés.

   □

4. Dans le plan, l'ensemble des points (x, y) vérifiant l'équation $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est une droite affine ; elle est dirigée par la droite vectorielle d'équation $ax + by = 0$.
5. Une partie $\mathcal{P}$ de E est un *plan affine* s'il existe un point A et deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que $P = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
6. Par trois points non alignés A, B, C passa un unique plan affine : c'est le plan passant par A et dirigé par $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Exemples.

- $\{(1+2t, -2+3t, 5-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est la droite affine passant par $(1, -2, 5)$ (correspond à $t = 0$) et dirigée par $\overrightarrow{u} = (2, 3, -1)$.
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$ est le plan affine passant par $(0, 0, 1)$ et dirigé par $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ (plan vectoriel de vecteur normal $(1, 1, 1)$).

3 Parallélisme et intersection

Définition 3.1. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E dirigés respectivement par F et G.

- On dit que $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ si $F \subseteq G$.
- On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles si $F = G$.

Remarques.

1. Pour que $\mathcal{F}$ soit parallèle à $\mathcal{G}$ il faut donc en particulier que $\dim F \leq \dim G$. Une droite peut être parallèle à un plan, ou un plan parallèle à un plan, mais un plan ne peut pas être parallèle à une droite.
2. Si τ est une translation, alors $\mathcal{F}$ et $\tau(\mathcal{F})$ sont parallèles. Réciproquement, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles, alors $\mathcal{G}$ est l'image de $\mathcal{F}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ où $(A, B) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$.

Proposition 3.2.

1. *Si $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ ou $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.*

2. *Deux sous-espaces affines parallèles sont soit disjoints, soit confondus.*

Démonstration. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de directions respectives F et G.

1. Supposons $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ et prenons $\Omega \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Alors comme $F \subseteq G$, on a

$$\mathcal{F} = \Omega + F \subseteq \Omega + G = \mathcal{G}.$$

2. Par hypothèse $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ est parallèle à $\mathcal{F}$. Si leur intersection est non vide, par ce qui précède on a alors $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ et $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, d'où l'égalité.

□

Proposition 3.3. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et G. Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors c'est un sous-espace affine de direction $F \cap G$.*

Démonstration. Supposons $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ et soit $\Omega \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. On a

$$\mathcal{F} = \{\Omega + \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \in F\} \quad \text{et} \quad \mathcal{G} = \{\Omega + \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \in G\}.$$

On en déduit que

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{\Omega + \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \in F \cap G\}.$$

Ceci montre que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction $F \cap G$. □

4 Hyperplans

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n.

Définition 4.1. Un *hyperplan plan affine* $\mathcal{H}$ de E est un sous-espace affine dont la direction est un hyperplan vectoriel de E. On appelle *vecteur normal* à $\mathcal{H}$ tout vecteur normal à sa direction.

Proposition 4.2. *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $\mathbf{a}$ un vecteur dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(a_1, \dots, a_n)$. Un hyperplan affine $\mathcal{H}$ de E a pour équation (dans $\mathcal{B}$)*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + h = 0$$

si et seulement si le vecteur $\mathbf{a}$ est normal à $\mathcal{H}$ (c'est-à-dire normal à sa direction).

Démonstration. Remarquons que si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, alors $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$. Soit $h \in \mathbb{R}$ et soit $\omega \in E$ tel que $\langle \mathbf{a}, \omega \rangle + h = 0$ (un tel ω existe toujours : il suffit de prendre $\omega = -h\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|^2$ par exemple). Montrons que

$$\{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + h = 0\} = \omega + \{\overrightarrow{u} \mid \langle \mathbf{a}, \overrightarrow{u} \rangle = 0\}.$$

$\boxed{\subseteq}$. Soit $\mathbf{x}$ tel que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + h = 0$ et posons $\overrightarrow{u} = \mathbf{x} - \omega = \overrightarrow{\omega\mathbf{x}}$. Alors par choix de ω on a

$$\langle \mathbf{a}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{a}, \omega \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + h = 0,$$

donc $\mathbf{x} = \omega + \overrightarrow{u} \in \omega + \{\overrightarrow{v} \mid \langle \mathbf{a}, \overrightarrow{v} \rangle = 0\}$.

$\boxed{\supseteq}$. Soit $\overrightarrow{u}$ tel que $\langle \mathbf{a}, \overrightarrow{u} \rangle = 0$.

$$\langle \mathbf{a}, \omega + \overrightarrow{u} \rangle + h = \underbrace{\langle \mathbf{a}, \omega \rangle + h}_{=0} + \underbrace{\langle \mathbf{a}, \overrightarrow{u} \rangle}_{=0} = 0,$$

d'où $\omega + \overrightarrow{u} \in \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + h = 0\}$.

On vient donc de prouver que pour tout $h \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + h = 0\}$ (qui est précisément l'ensemble d'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + h = 0$) est un hyperplan affine de E de direction l'hyperplan vectoriel $\{\overrightarrow{u} \mid \langle \mathbf{a}, \overrightarrow{u} \rangle = 0\} = \mathbf{a}^\perp$ dont un vecteur normal est $\mathbf{a}$ (et qui est l'ensemble d'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$).

La proposition en découle aisément (détails laissés en exercice). □