Algèbre 4 - Cours 8
Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs

Printemps 2023

Table des matières

6 Réduction des endomorphismes normaux

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Rappelons que $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme normal s'il commute avec son adjoint, i.e. $u^* \circ u = u \circ u^*$. De plus, si $F \subseteq E$ est stable par u (c'est-à-dire que $u(F) \subseteq F$), alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Théorème 6.1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe des entiers $r, s \geq 0$ vérifiant $r + 2s = n$ et une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a la forme diagonale par blocs suivante*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix},$$

où, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ et $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$ avec $(a_j, b_j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ pour $j = 1, \dots, s$.

Remarque. τ_j est la matrice d'une similitude plane directe (composée d'une rotation et d'une homothétie).

Démonstration. On procède par récurrence sur n.

Initialisation. Le cas $n = 1$ est trivial. Montrons le résultat pour $n = 2$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée quelconque de E et

$$M := M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. On sait que M et ${}^tM$ commutent. D'un côté on a

$$M{}^tM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & a^2 + d^2 \end{pmatrix},$$

et de l'autre
$$ {}^tMM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & a^2+c^2 \end{pmatrix}, $$
Puisque $M{}^tM = {}^tMM$, on en déduit que

(i). $a^2+b^2 = a^2+c^2$

(ii). $ac+bd = ab+cd$.

La première égalité implique $b^2 = c^2$, c'est-à-dire $b = \pm c$. Si $b = c$ alors M est symétrique et par le théorème spectral u est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathcal{B}'$. Dans le cas où $b \neq c$, alors on a $b = -c \neq 0$ et la deuxième égalité livre $ac - cd = -ac + cd$, c'est-à-dire $a = d$. D'où
$$ M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} $$
ce qui est bien de la forme attendue.

Hérédité. Supposons le théorème vrai pour $k = 1, \dots, n-1$ avec $n \geq 3$. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe F de dimension 1 ou 2 stable par u. Le sous-espace $F^\perp$ est aussi stable par u et de dimension $\leq n-1$. Il existe donc $\mathcal{B}_1$ base orthonormée de F (resp. $\mathcal{B}_2$ base orthonormée de $F^\perp$) telle que la matrice de $u_{|F}$ (resp. $u_{|F^\perp}$) ait la forme désirée. La base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est une base orthonormée de E, et quitte à réordonner ses éléments la matrice de u dans $\mathcal{B}$ a la forme désirée.

□

7 Décomposition polaire (Hors-programme)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n.j Les preuves de cette partie n'ont pas été faites en cours.

Théorème 7.1 (Décomposition polaire)**.** *Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$. Alors il existe un unique couple $(w, s) \in \mathcal{O}(E) \times S^{++}(E)$ tel que $u = w \circ s$.*

Théorème 7.2 (Décomposition polaire - Version matricielle)**.** *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un unique couple $(\Omega, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = \Omega S$.*

Pour montrer le théorème, on a le résultat suivant qui permet de définir la "racine carrée" d'un endomorphisme autoadjoint positif.

Lemme 7.3. *Soit $u \in S^+(E)$. Alors il existe un unique $v \in S^+(E)$ tel que $v \circ v = u$. On note $v := \sqrt{u}$.*

Démonstration. Existence. Par le théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que
$$ M := M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, $$
avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ (puisque $u \in S^+(E)$). Soit v dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est
$$ N := M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}. $$
Alors $v \in S^+(E)$ (puisque $\mathcal{B}$ est une BON et que $M_{\mathcal{B}}(v)$ est symétrique avec des valeurs propres ≥ 0) et vérifie bien $v \circ v = u$ (puisque $N^2 = M$).

Unicité. C'est la partie la plus délicate de la preuve. L'idée est de se restreindre au sous-espaces propres de u, ce qui permet implicitement de se ramener au cas où u est de la forme $\mu\mathrm{Id}$. On note $\mu_1, \dots, \mu_s$ les valeurs propres distinctes de u. Pour $i = 1, \dots, s$, écrivons $E_i := E_{\mu_i}(u) = \ker(u - \mu_i \mathrm{Id})$ le sous-espace propre associé à u. Remarquons d'abord que v commute avec $v^2 = u$. Donc chaque E_i est stable par v (en effet, pour tout $\mathbf{x} \in E_i$, on a $u(v(\mathbf{x})) = v(u(\mathbf{x})) = v(\mu_i \mathbf{x}) = \mu_i v(\mathbf{x})$, donc $v(\mathbf{x}) \in \ker(u - \mu_i \mathrm{Id}) = E_i$). Notons v_i l'induit de v sur E_i. Alors

$$v_i \in S^+(E_i).$$

En effet, pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_i$, on a

$$\langle v_i(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle v(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, v(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, v_i(\mathbf{y}) \rangle,$$

donc v_i est autoadjoint, et $\langle v_i(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = \langle v(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle \geq 0$, donc v_i est positif. Soit $\lambda \geq 0$ une valeur propre de v_i. Il existe $\mathbf{x} \in E_i$ non nul tel que $v_i(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$. Donc $v_i^2(\mathbf{x}) = v_i(\lambda \mathbf{x}) = \lambda v_i(\mathbf{x}) = \lambda^2 \mathbf{x}$. Donc λ^2 est valeur propre de $v_i^2 = u_{|E_i} = \mu_i \mathrm{Id}_{E_i}$. On en déduit que $\lambda = \sqrt{\lambda_i}$. Donc v_i ne possède qu'une seule valeur propre, et comme v_i est diagonalisable, on en déduit que $v_i = \sqrt{\lambda_i} \mathrm{Id}_{E_i}$. Cela montre l'unicité de v (la donnée de $v_1, \dots, v_s$ caractérise entièrement v puisque $E = \bigoplus_{i=1}^s E_i$, et on vient de voir que qu'il n'y a qu'un seul choix possible pour v_i). $\square$

Remarque. Si $u \in S^{++}(E)$ alors $v \in S^{++}(E)$.

Preuve de la décomposition polaire. Unicité. Supposons que $u = w \circ s$ comme dans l'énoncé. On a vu que $u^* \circ u \in S^{++}(E)$. Or

$$u^* \circ u = s^* \circ \underbrace{w^* \circ w}_{=\mathrm{Id}} \circ s = s^* \circ s = s^2.$$

D'après le lemme précédent, il y a unicité de $s = \sqrt{u^* \circ u}$. Donc $w = u \circ s^{-1}$ est également unique.

Existence. $u^* \circ u \in S^{++}(E)$. D'après le lemme précédent il existe $s \in S^{++}(E)$ tel que $u^* \circ u = s^2$. Posons maintenant $w := u \circ s^{-1}$. Il reste à montrer que $w \in \mathcal{O}(E)$. On a

$$w^* = (s^{-1})^* \circ u^* = (s^*)^{-1} \circ u^* = s^{-1} \circ u^*.$$

On trouve alors

$$w^* \circ w = s^{-1} \circ \underbrace{u^* \circ u}_{=s^2} \circ s^{-1} = \mathrm{Id}.$$

Donc $w \in \mathcal{O}(E)$. $\square$