Algèbre 4 - Cours 8
Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs

Printemps 2023

Table des matières

4 Autoadjoints positifs et définis positifs

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n.

Définition 4.1. Etant donné $f \in \mathcal{L}(E)$, on appelle *spectre* de f et on note $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble de ses valeurs propres réelles.

Remarque. (Hors-programme) D'une manière générale, si f est un endomorphisme d'un K-espace vectoriel (où K est un corps quelconque), son spectre est l'ensemble de ses valeurs propres dans K.

Proposition 4.2. *Soit $u \in S(E)$. Alors*

$$\mathrm{Sp}(u) \subseteq \mathbb{R}^+ \iff \langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle \geq 0 \textit{ pour tout } \mathbf{x} \in E.$$

Un endomorphisme u vérifiant ces conditions est dit positif*. De manière similaire*

$$\mathrm{Sp}(u) \subseteq \mathbb{R}^+_* \iff \langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle > 0 \textit{ pour tout } \mathbf{x} \in E \setminus \{0\}.$$

Un endomorphisme u vérifiant ces conditions est dit défini positif*.*

Démonstration. (Première équivalence)

$\Rightarrow$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ les valeurs propres de u. Par le théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de u est la matrice diagonale de termes diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Soit $\mathbf{x} \in E$ dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(x_1, \ldots, x_n)$. Alors dans $\mathcal{B}$ on a $u(\mathbf{x}) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n)$ d'où

$$\langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq 0.$$

$\Leftarrow$. Réciproquement, supposons $\langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle \geq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in E$. Soit λ une valeur propre de u et $\mathbf{x}$ un vecteur propre non nul associé. Par hypothèse

$$\langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \lambda \underbrace{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}_{>0} \geq 0,$$

donc $\lambda \geq 0$.

La démonstration de la seconde équivalence est similaire en remplaçant toutes les inégalités larges $\geq$ par des inégalités strictes $>$ (et en supposant $\mathbf{x} \neq 0$). $\square$

Définition 4.3. On note $S^+(E)$ (resp. $S^{++}(E)$) l'ensemble des $u \in S(E)$ qui sont positifs (resp. définis positifs).

Remarques.

- On a bien sûr $S^{++}(E) \subseteq S^+(E)$. Plus précisément, $S^{++}(E) = S^+(E) \cap \mathrm{GL}(E)$ (puisque que $u \in \mathrm{GL}(E)$ si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de u).
- Attention $S(E)$ est un espace vectoriel, mais ce n'est PAS le cas de $S^+(E)$ ni de $S^{++}(E)$ (si $u \in S^+(E)$ alors $-u \notin S^+(E)$).

Définition 4.4. On définit

$$S_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in S_n(\mathbb{R}) \,|\, {}^tXMX \geq 0 \text{ pour tout } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\},$$

et

$$S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{M \in S_n(\mathbb{R}) \,|\, {}^tXMX > 0 \text{ pour tout } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\}.$$

Remarque. Ce sont donc des sous-ensembles de l'ensemble des matrices symétriques $S_n(\mathbb{R})$. La proposition suivante montre qu'ils correspondent à la version matricielle de $S^+(E)$ et $S^{++}(E)$ respectivement (rappelons qu'on avait vu que $S(E)$ correspondait à $S_n(\mathbb{R})$ via $f \mapsto M_{\mathcal{B}}(f)$, où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée fixée de E).

Remarque. Dans le cours sur les formes bilinéaires, on avait la notion de forme bilinéaire symétrique *définie positive* (ce sont celles qui permettent de définir un produit scalaire). Rappelons qu'une forme bilinéaire symétrique φ sur un espace vectoriel V est définie positive si $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ pour tout $\mathbf{x} \in V$ non nul. La matrice de la forme bilinéaire symétrique φ dans une base $\mathcal{B}$ de V est une matrice symétrique A, et la condition $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ se réécrit (en termes matriciels) ${}^tXAX > 0$. Autrement dit, φ est définie positive ssi sa matrice A appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$ (il n'y a donc pas de conflit de terminologie, bien qu'ici on considère un endormorphisme autoajoint et sa matrice dans une BON plutôt que qu'une forme bilinéaire symétrique et sa matrice dans une base quelconque).

Proposition 4.5. *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = M_{\mathcal{B}}(u)$ sa matrice dans $\mathcal{B}$. Alors*

$$u \in S^+(E) \Longleftrightarrow M \in S_n^+(\mathbb{R}).$$

De manière similaire

$$u \in S^{++}(E) \Longleftrightarrow M \in S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

En particulier $S_n^+(\mathbb{R}) = M_{\mathcal{B}}(S^+(E))$ et $S_n^{++}(\mathbb{R}) = M_{\mathcal{B}}(S^{++}(E))$.

Démonstration. Etant donné $\mathbf{x} \in E$ on note X le vecteur colonne représentant $\mathbf{x}$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors $u(\mathbf{x})$ et représenté par MX, et comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a $\langle \mathbf{x}, u(\mathbf{x}) \rangle = {}^tXMX$. Cela implique les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} u \in S^+(E) &\Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, u(\mathbf{x}) \rangle \geq 0 \ \forall \mathbf{x} \in E \\ &\Leftrightarrow {}^tXMX \geq 0 \ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M \in S_n^+(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

De même avec $S^{++}(E)$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$. □

Le résultat suivant permet de construire facilement un endomorphisme autoadjoint positif à partir d'un endomorphisme quelconque.

Proposition 4.6. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $f^* \circ f \in S^+(E)$.*

Démonstration. On a $(f^* \circ f)^* = f^* \circ f^{**} = f^* \circ f$, donc $f^* \circ f \in S(E)$. De plus, pour tout $\mathbf{x} \in E$, comme f est l'adjoint de f^*, on a

$$\langle f^*(f(\mathbf{x})), \mathbf{x} \rangle = \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \rangle \geq 0,$$

donc $f^* \circ f \in S^+(E)$. □

Proposition 4.7 (Version matricielle)**.** *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors ${}^tMM \in S_n^+(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $M_{\mathcal{B}}(f) = M$. Comme $M_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^tM$, on en déduit que la matrice de $f^* \circ f$ dans $\mathcal{B}$ est ${}^tMM$. Comme $f^* \circ f \in S^+(E)$ on a bien ${}^tMM \in S_n^+(\mathbb{R})$. $\square$

La proposition suivante permet de caractériser les valeurs propres d'un endomorphisme autoadjoint u en fonction des valeurs prises par $\langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle$. On ne s'en sert pas en pratique pour effectivement trouver les valeurs propres mais ce résultat a un intérêt théorique (on s'en servira par exemple pour prouve le critère de Sylvester, qui lui est utile en pratique).

Proposition 4.8 (Principe du min-max (Hors-programme))**.** *Pour $k = 1, \dots, n$ on note $\mathcal{G}_k(E)$ l'ensemble des sous-espaces F de E de dimension k. Soient $u \in S(E)$ et $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres (comptées avec multiplicité) rangées dans l'ordre croissant. Alors pour $k = 1, \dots, n$, on a*

$$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{G}_k(E)} \max_{\substack{\mathbf{x} \in F \\ \|\mathbf{x}\|=1}} \langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle.$$

De manière équivalente, soient $\eta_1 \geq \dots \geq \eta_n$ les valeurs propres de u rangées dans l'ordre décroissant. Alors

$$\eta_k = \max_{F \in \mathcal{G}_k(E)} \min_{\substack{\mathbf{x} \in F \\ \|\mathbf{x}\|=1}} \langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle.$$

Remarque. Pour tout $F \in \mathcal{G}_k(E)$ l'ensemble $\{\mathbf{x} \in F \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$ est un compact et la fonction $\mathbf{x} \mapsto \langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle$ est continue, donc elle admet un maximum sur ce compact.

Démonstration. Par le théorème spectral, il existe $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base orthonormée de E telle que $u(\mathbf{e}_k) = \lambda_k \mathbf{e}_k$ pour $k = 1, \dots, n$. Fixons k entre 1 et n et posons $H = \mathrm{Vect}(\mathbf{e}_k, \dots, \mathbf{e}_n)$ (de dimension $n - k + 1$). Soit $F \in \mathcal{G}_k(E)$. Comme $\dim F + \dim H = n + 1$, on a $\dim(F \cap H) \geq 1$, donc il existe $\mathbf{x} =\in F \cap H$ non nul. Quitte à renormaliser, on peut supposer $\|\mathbf{x}\| = 1$. Comme $\mathbf{x} \in H$, il s'écrit $\mathbf{x} = (0, \dots, 0, x_k, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$. On trouve alors

$$\langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle = \sum_{i=k}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{\geq \lambda_k} x_i^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^{n} x_i^2 = \lambda_k \|\mathbf{x}\| = \lambda_k.$$

D'où $\max\limits_{\mathbf{x} \in F, \|\mathbf{x}\|=1} \langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle \geq \lambda_k$. On en déduit

$$\inf_{F \in \mathcal{G}_k(E)} \max_{\substack{\mathbf{x} \in F \\ \|\mathbf{x}\|=1}} \langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle \geq \lambda_k.$$

Posons maintenant $F := \mathrm{Vect}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \in \mathcal{G}_k(E)$. Alors pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in F$ avec $\|\mathbf{x}\| = 1$, on a

$$\langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\lambda_i}_{\leq \lambda_k} x_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=1}^{k} x_i^2 = \lambda_k \|\mathbf{x}\|^2 = \lambda_k.$$

Par ailleurs, pour $\mathbf{x} = \mathbf{e}_k \in F$ on a $\langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle = \lambda_k$, d'où $\max\limits_{\mathbf{x} \in F, \|\mathbf{x}\|=1} \langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle = \lambda_k$. On en déduit

$$\inf_{F \in \mathcal{G}_k(E)} \max_{\substack{\mathbf{x} \in F \\ \|\mathbf{x}\|=1}} \langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle \leq \lambda_k.$$

Combiné avec ce qui précède on obtient l'égalité et l'inf est un min (car atteint pour F comme ci-dessus).

Pour trouver la deuxième inégalité, il suffit d'appliquer le résultat précédent à $-u$. Ses valeurs propres (rangées dans l'ordre croissant) sont alors $-\lambda_n, \ldots, -\lambda_1$, c'est-à-dire $-\eta_1, \ldots, -\eta_n$. On trouve ainsi

$$-\eta_k = \min_{F \in \mathcal{G}_k(E)} \max_{\substack{\mathbf{x} \in F \\ \|\mathbf{x}\|=1}} -\langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle,$$

c'est-à-dire

$$\eta_k = -\min_{F \in \mathcal{G}_k(E)} \max_{\substack{\mathbf{x} \in F \\ \|\mathbf{x}\|=1}} -\langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = \max_{F \in \mathcal{G}_k(E)} -\max_{\substack{\mathbf{x} \in F \\ \|\mathbf{x}\|=1}} -\langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = \max_{F \in \mathcal{G}_k(E)} \min_{\substack{\mathbf{x} \in F \\ \|\mathbf{x}\|=1}} \langle u(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle.$$

$\square$

La version matricielle de l'énoncé précédent est la suivante.

Proposition 4.9 (Principe du min-max matriciel (Hors-programme))**.** *Pour $k = 1, \ldots, n$ on note $\mathcal{G}_{n,k}$ l'ensemble des sous-espaces F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k. Soient $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres (comptées avec multiplicité) rangées dans l'ordre croissant. Alors pour $k = 1, \ldots, n$, on a*

$$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{G}_{n,k}} \max_{\substack{X \in F \\ {}^tXX=1}} {}^tXAX.$$

De manière équivalente, soient $\eta_1 \geq \cdots \geq \eta_n$ les valeurs propres de A rangées dans l'ordre décroissant. Alors

$$\eta_k = \max_{F \in \mathcal{G}_{n,k}} \min_{\substack{X \in F \\ {}^tXX=1}} {}^tXAX.$$

5 Critère de Sylvester

Comment déterminer que $A \in S_n(\mathbb{R})$ appartient à $S_n^{++}(\mathbb{R})$?

Première idée : montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ on a ${}^tXAX > 0$. C'est une mauvaise idée a priori (trop compliqué la plupart du temps).

Deuxième idée : Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A et montrer que ses racines sont toutes strictement positives. Inconvénient : cela peut être compliqué de trouver les racines de χ_A si son degré est élevé.

On dispose du critère suivant agréable ci-dessous pour répondre à cette question. Pour cela, introduisons quelques notations.

Définition 5.1. Etant donné $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier i entre 1 et n, on note

$$M^{(i)} := \begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{i1} & & m_{ii} \end{pmatrix}$$

la matrice de taille i obtenu à partir de M en extrayant le bloc carré supérieur gauche de taille i. On appelle *i-ème mineur principal de M* et on note $\mu_i(M) := \det(M^{(i)})$.

Proposition 5.2 (Critère de Sylvester)**.** *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. S'équivalent :*

- $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
- $\mu_i(A) > 0$ *pour* $i = 1, \ldots, n$.

Démonstration. $\Longrightarrow$. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrons d'abord que $A^{(i)} \in S_i^{++}(\mathbb{R})$ pour $i = 1, \ldots, n$. Soit $Y \in \mathcal{M}_{i,1}(\mathbb{R})$ non nul. On pose $X = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$ {}^tYA^{(i)}Y = {}^tXAX > 0 \quad \text{car } A \in S_n^{++}(\mathbb{R}). $$

D'où $A^{(i)} \in S_i^{++}(\mathbb{R})$. Donc son déterminant (qui vaut le produit de ses valeurs propres) est > 0.

$\Longleftarrow$. On procède par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivial. Supposons la propriété vraie pour $n-1$ (avec $n \geq 2$). Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\mu_i(A) > 0$ pour $i = 1, \ldots, n$ et notons $B = A^{(n-1)}$. Alors $B \in S_{n-1}(\mathbb{R})$ et pour $i = 1, \ldots, n-1$ on a $\mu_i(B) = \mu_i(A) > 0$. Donc par hypothèse de récurrence $B \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$.

Notons $\eta_1 \geq \cdots \geq \eta_{n-1} > 0$ les valeurs propres de B et $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ celles de A. On veut montrer que $\lambda_k > 0$ pour tout k. Fixons k entre 1 et $n-1$ et V un sous-espace de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ de dimension k. On note W l'ensemble des $Y_X := \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $X \in V$. C'est un sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k. Soit $X \in V$ avec ${}^tXX = 1$ et posons $Y := Y_X \in W$. Puisque ${}^tYY = {}^tXX = 1$ et ${}^tXBX = {}^tYAY$, on en déduit que

$$ \min_{\substack{X \in V \\ {}^tXX=1}} {}^tXBX = \min_{\substack{Y \in W \\ {}^tYY=1}} {}^tYAY \leq \max_{F \in \mathcal{G}_{n,k}} \min_{\substack{Y \in F \\ {}^tYY=1}} {}^tYAY = \lambda_k. $$

En passant au max sur la partie gauche, on en déduit que

$$ \mu_k = \max_{F \in \mathcal{G}_{n-1,k}} \min_{\substack{X \in F \\ {}^tXX=1}} {}^tXBX \leq \lambda_k. $$

En particulier $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} > 0$. Enfin, on a $\det(A) = \underbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}_{>0} \lambda_n > 0$ par hypothèse, donc $\lambda_n > 0$. D'où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. $\square$