Algèbre 4 - Cours 7
Adjoints

Printemps 2023

Table des matières

1 Adjoint d'un endomorphisme

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n.

Proposition 1.1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$, appelé* adjoint *de u, vérifiant pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$*

$$\langle u(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, u^*(\mathbf{y}) \rangle.$$

Remarque. Si v est l'adjoint de u, alors u est aussi l'adjoint de v (par symétrie du produit scalaire).

Démonstration. Soit $\mathbf{y} \in E$. L'application $\psi_{\mathbf{y}} : \mathbf{x} \mapsto \langle u(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle$ est une forme linéaire, donc par le théorème de représentation il existe un unique vecteur $u^*(\mathbf{y}) \in E$ tel que $\psi_{\mathbf{y}} = \langle u^*(\mathbf{y}), \cdot \rangle$, c'est-à-dire que pour tout $\mathbf{x} \in E$ on ait

$$\langle u(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, u^*(\mathbf{y}) \rangle.$$

Cela montre l'unicité de u^*.

Il reste à montrer que l'application $u^* : \mathbf{y} \mapsto u^*(\mathbf{y})$ est linéaire. Soient $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $\mathbf{x} \in E$, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, u^*(\lambda \mathbf{y} + \mu \mathbf{z}) \rangle = \langle u(\mathbf{x}), \lambda \mathbf{y} + \mu \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle u(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle + \mu \langle u(\mathbf{x}), \mathbf{z} \rangle &= \lambda \langle \mathbf{x}, u^*(\mathbf{y}) \rangle + \mu \langle \mathbf{x}, u^*(\mathbf{z}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \lambda u^*(\mathbf{y}) + \mu u^*(\mathbf{z}) \rangle, \end{aligned}$$

et par unicité on en déduit que $u^*(\lambda \mathbf{y} + \mu \mathbf{z}) = \lambda u^*(\mathbf{y}) + \mu u^*(\mathbf{z})$. Donc u^* est bien linéaire. □

On étudiera trois cas particuliers :

- auto-adjoint (ou symétrique) : $u^* = u$,
- orthogonal : u inversible et $u^* = u^{-1}$,
- normal : $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Expression matricielle

Proposition 1.2. *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note M (resp. M^*) la matrice de u (resp. de u^*) dans $\mathcal{B}$. Alors*

$$M^* = {}^tM.$$

Démonstration. On note v l'endomorphisme de E dont la matrice écrite dans la base $\mathcal{B}$ est ${}^tM$. Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$. On note X et Y les matrices colonnes de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ écrits dans la base $\mathcal{B}$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, on a

$$\langle u(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = {}^t(MX)Y = {}^tX({}^tMY) = \langle \mathbf{x}, v(\mathbf{y}) \rangle.$$

Par unicité de l'adjoint, on en déduit que $v = u^*$, et donc $M^* = {}^tM$. □

Remarque. (Exo) Si $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E et A est la matrice (symétrique) du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$, alors

$$M^* = A^{-1}({}^tM)A.$$

Si $\mathcal{B}$ est orthonormée alors $A = I_n$ (matrice identité) et on retrouve la formule précédente.

Démonstration. On note v l'endomorphisme de E dont la matrice écrite dans la base $\mathcal{B}$ est $A^{-1}{}^tMA$. Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$. On note X et Y les matrices colonnes de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ écrits dans la base $\mathcal{B}$. Par définition de A, on a

$$\langle u(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = {}^t(MX)AY = {}^tX{}^tMAY = {}^tXA(A^{-1}{}^tMAY) = \langle \mathbf{x}, v(\mathbf{y}) \rangle.$$

Par unicité de l'adjoint, on en déduit que $v = u^*$, et donc $M^* = A^{-1}{}^tMA$. □

On déduit facilement de l'identité $M^* = {}^tM$ le résultat suivant.

Proposition 1.3. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :*

1. *L'application $f \mapsto f^*$ est linéaire, c'est-à-dire que $(u+v)^* = u^* + v^*$ et $(\lambda u)^* = \lambda u^*$.*
2. *$(uv)^* = v^*u^*$*
3. *Si u est inversible, alors u^* l'est aussi et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et U (resp. V) la matrice de u (resp. v) dans $\mathcal{B}$. La matrice de u^* (resp. v^*) dans $\mathcal{B}$ est ${}^tU$ (resp. ${}^tV$).

(1.) est équivalent à dire que $M \mapsto {}^tM$ est linéaire.

(2.) est équivalent à ${}^t(UV) = {}^tV{}^tU$.

(3.) est équivalent à ${}^t(U^{-1}) = ({}^tU)^{-1}$ (en supposant U inversible).

□