Algèbre 4 - Cours 7
Adjoints (suite)

Printemps 2023

Table des matières

2 Endomorphismes autoadjoints, orthogonaux et normaux

Endomorphismes autoadjoints

Définition 2.1. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint (ou symétrique) s'il vérifie $u^* = u$, autrement dit pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ on a

$$\langle u(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, u(\mathbf{y})\rangle.$$

On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

Proposition 2.2. *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. S'équivalent :*

(a) u est autoadjoint.

(b) La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est symétrique.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et M sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Alors $u^* = u$ est équivalent à ${}^tM = M$ puisque la matrice de u^* dans la base $\mathcal{B}$ est ${}^tM$. □

Corollaire 2.3. *L'ensemble $S(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $n(n+1)/2$ (où $n := \dim(E)$).*

Démonstration. On choisit une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. L'application $\Phi : u \mapsto M_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Par ailleurs l'ensemble des matrices symétriques $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n+1)/2$. Donc $S(E) = \Phi^{-1}(S_n(\mathbb{R}))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de la dimension annoncée. □

Remarque. Attention, $S(E)$ n'est pas stable par composition (si $u, v \in S(E)$ on n'a pas toujours $u \circ v \in S(E)$).

Proposition 2.4. *Soit $u \in S(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E tel que $u(F) \subseteq F$ (c'est-à-dire F stable par u). Alors $u(F^\perp) \subseteq F^\perp$. On note φ l'induit de u sur F. Alors $\varphi \in S(F)$.*

Démonstration. Soit $\mathbf{y} \in F^\perp$. Montrons que $u(\mathbf{y}) \in F^\perp$. Pour tout $\mathbf{x} \in F$, comme $u(\mathbf{x}) \in F$ on a

$$0 = \langle u(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, u^*(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, u(\mathbf{y})\rangle,$$

donc on a bien $u(\mathbf{y}) \in F^\perp$.

Pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F$, on a

$$\langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle u(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, u(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \varphi(\mathbf{y}) \rangle,$$

donc par unicité de l'adjoint on a $\varphi^* = \varphi$, c'est-à-dire $\varphi \in S(F)$. □

Exemples. (d'endomorphismes autoadjoints). On a vu que la matrice d'une projection orthogonale dans une base orthonormée est toujours symétrique, donc toute projection orthogonale est un endormorphisme autoadjoint. Il en va de même des symétries orthogonales.

Endomorphismes orthogonaux

Proposition 2.5. *Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$. Alors u est orthogonal (c'est-à-dire $u \in \mathcal{O}(E)$) si et seulement si $u^* = u^{-1}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $M = M_{\mathcal{B}}(u) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors puisque $M_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^tM$, on a

$$u^* = u^{-1} \Leftrightarrow {}^tM = M^{-1} \Leftrightarrow {}^tMM = I_n \Leftrightarrow M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow u \in \mathcal{O}(E).$$

□

Le résultat suivant a déjà été montré précédemment dans le cours.

Proposition 2.6. *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E tel que $u(F) \subseteq F$ (c'est-à-dire F stable par u). Alors $u(F^\perp) \subseteq F^\perp$. On note φ l'induit de u sur F. Alors $\varphi \in \mathcal{O}(F)$.*

Endomorphismes normaux

Définition 2.7. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est *normal* s'il vérifie $u \circ u^* = u^* \circ u$.

Exemples. Les endomorphismes autoadjoints et orthogonaux sont aussi normaux.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que u est autoadjoint. Alors $u^* = u$, donc en particulier $u \circ u^* = u^2 = u^* \circ u$, donc u est normal. Supposons maintenant u orthogonal. Alors u est inversible et $u^* = u^{-1}$. En particulier $u \circ u^* = \mathrm{Id}_E = u^* \circ u$. Donc u est aussi normal. □

Proposition 2.8. *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. S'équivalent :*

(a) u est normal.

(b) La matrice de u dans $\mathcal{B}$ commute avec sa transposée.

Démonstration. On note M la matrice de u dans $\mathcal{B}$. Alors comme $M_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^tM$, on a u est normal ssi $u \circ u^* = u^* \circ u$, ce qui est équivalent d'un point de vue matricielle à $M{}^tM = {}^tMM$. □

Le résultat suivant avait été prouvé pour les endomorphismes orthogonaux et autoadjoints seulement (qui sont un cas particulier des endomorphismes normaux).

Proposition 2.9. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal et $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel tel que $u(F) \subseteq F$ (c'est-à-dire F stable par u). Alors $u(F^\perp) \subseteq F^\perp$. On note φ la restriction de u à F. Alors φ est un endomorphisme normal de F.*

Démonstration. On note $p = \dim(F)$ et $q = n - p = \dim(F^\perp)$. On choisit $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ des bases orthonormées de F et $F^\perp$ respectivement. Dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, la matrice de u a la forme (par blocs) suivante

$$M := M_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right),$$

où $A \in M_p(\mathbb{R})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C \in M_q(\mathbb{R})$. On veut montrer que $B = 0$ (ainsi $F^\perp$ sera stable par u). On a

$$M^* := M_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^tM = \left(\begin{array}{c|c} {}^tA & 0 \\ \hline {}^tB & {}^tC \end{array}\right).$$

Comme u et u^* commutent, on a $MM^* = M^*M$. Comme

$$MM^* = \left(\begin{array}{c|c} A^tA + B^tB & B^tC \\ \hline C^tB & C^tC \end{array}\right) \quad \text{et} \quad M^*M = \left(\begin{array}{c|c} {}^tAA & {}^tAB \\ \hline {}^tBA & {}^tBB + {}^tCC \end{array}\right),$$

on en déduit que $A^tA + B^tB = {}^tAA$. En passant à la trace, cela conduit à $\mathrm{Tr}(B^tB) = 0$, donc $B = 0$ (on a vu que $B \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}(B^tB)}$ était une norme euclidienne). Donc $F^\perp$ est bien stable par u.

Par ailleurs, en reprenant l'égalité précédente, on trouve $A^tA = {}^tAA$. Comme A est la matrice de la φ dans la base orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$ (et ${}^tA$ est la matrice de φ^*), on trouve que φ est normal (φ^* et φ commutent). $\square$

3 Théorème spectral

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1 (Théorème spectral)**.** *Soit $u \in S(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Alors u se diagonalise dans une base orthonormée (autrement dit il existe une BON de E dans laquelle la matrice de u est diagonale).*

D'un point de vue matricielle, on a l'énoncé suivant.

Théorème 3.2 (Théorème spectral (version matricielle))**.** *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1} = PD^tP$.*

Remarque. En particulier toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (et ses valeurs propres sont donc réelles) !

Pour prouver le théorème spectral on va avoir besoin du résultat intermédiaire suivant.

Lemme 3.3. *Soit $u \in S(E)$. Alors u possède une valeur propre réelle.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $S = M_{\mathcal{B}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$ la matrice (symétrique) de u dans $\mathcal{B}$. Comme le polynôme caractéristique de S est scindé sur $\mathbb{C}$ et de degré $n \geq 1$ il possède une racine (a priori complexe) λ. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre colonne non nul associé à λ (donc $AX = \lambda X$). Alors

$${}^t\overline{X}AX = \lambda{}^t\overline{X}X \in \mathbb{C}.$$

Or comme A est symétrique et à valeurs réelles, on a ${}^t\overline{({}^t\overline{X}AX)} = {}^t\overline{X}{}^t\overline{A}X = {}^t\overline{X}AX$. D'un autre côté, l'expression précédente est aussi égale à ${}^t\overline{(\lambda{}^t\overline{X}X)} = \overline{\lambda}{}^t\overline{X}X$. Comme ${}^t\overline{X}X \neq 0$ (puisque $X \neq 0$) on en déduit que $\lambda = \overline{\lambda}$, c'est-à-dire $\lambda \in \mathbb{R}$. D'où S (et donc u) possède bien une valeur propre réelle. $\square$

Preuve du théorème spectral. On raisonne par récurrence sur n. Soit H_n la proposition "si $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace euclidien de dimension n et $u \in S(E)$ alors il existe une base orthonormée de E qui diagonalise u".

Initialisation. Le cas $n = 1$ est trivial.

Hérédité. Soit $n \geq 2$ tel que H_{n-1} soit vraie. Soient E un espace euclidien de dimension n et $u \in S(E)$. On a vu que u possède une valeur propre réelle. Soit $\mathbf{x} \in E$ non nul un vecteur propre associé. Alors $\mathbb{R}\mathbf{x}$ est stable par u, et donc son orthogonal $F := (\mathbb{R}\mathbf{x})^\perp$ aussi par la Proposition 2.4. Notons φ l'induit de u sur F. Alors $\varphi \in S(F)$ et $\dim(F) = n - 1$. Par hypothèse de récurrence il existe $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base orthonormée de F dans laquelle φ est diagonale. On pose $e_n := \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$. Alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E (puisque $\mathbf{x} \perp F$) et dans cette base la matrice de u est diagonale. $\square$

Preuve de la version matricielle du théorème spectral. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension n et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est S. Alors $u \in S(E)$, donc par le théorème spectral il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale D. La formule du changement de bases donne $S = PDP^{-1}$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. La matrice de passage entre deux BON étant une matrice orthogonale on a bien $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. $\square$

Voici une autre version du théorème spectral.

Théorème 3.4. *Soit $u \in S(E)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ ses valeurs propres distincts. Alors*

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{1\leq i\leq s}} E_{\lambda_i}(u),$$

où $E_{\lambda_i}(u) = \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id})$ est le sous-espace propre associé à λ_i.

Remarque. La notation $\overset{\perp}{\bigoplus}$ signifie que la somme est orthogonale (en particulier les sous-espaces propres de u sont en somme directe orthogonale).

Démonstration. Déjà, rappelons que u est diagonalisable est équivalent à $E = \bigoplus_{1\leq i\leq s} E_{\lambda_i}(u)$, et d'après le théorème spectral on sait que u est diagonalisable. Donc on a déjà

$$E = \bigoplus_{1\leq i\leq s} E_{\lambda_i}(u)$$

et il reste à montrer que la somme directe est orthogonale. Soit $i \neq j$ avec $1 \leq i, j \leq s$. Il faut montrer que $E_{\lambda_i}(u) \perp E_{\lambda_j}(u)$. Soient $\mathbf{x} \in E_{\lambda_i}(u)$ et $\mathbf{y} \in E_{\lambda_j}(u)$. Alors comme $u(\mathbf{x}) = \lambda_i\mathbf{x}$ et $u(\mathbf{y}) = \lambda_j\mathbf{y}$, on trouve

$$\lambda_i\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \langle u(\mathbf{x}),\mathbf{y}\rangle = \langle\mathbf{x},u(\mathbf{y})\rangle = \lambda_j\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle,$$

d'où $(\lambda_i - \lambda_j)\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = 0$. Comme $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ on a nécessairement $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = 0$. $\square$

On vient de prouver que le théorème spectral impliquaitl le Théorème 3.4. Réciproquement, on peut montrer que Théorème 3.4 $\Rightarrow$ Théorème spectral. En effet, supposons que

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{1\leq i\leq s}} E_{\lambda_i}(u).$$

Alors u est diagonalisable (voir la remarque au début de la preuve précédente). Soit $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_s$ des bases orthonormées respectives de $E_{\lambda_1}(u), \ldots, E_{\lambda_s}(u)$. Alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_s)$ est une base orthonormée de E (puisque par hypothèse, pour tous $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_i$ et $\mathbf{y} \in \mathcal{B}_j$ avec $i \neq j$, on a $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Comme c'est une base de vecteurs propres, u est diagonale dans $\mathcal{B}$.