Algèbre 4 - Cours 6
Groupe orthogonal (suite)

Printemps 2023

Table des matières

6 Produit vectoriel

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3 (on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée) et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe.

Définition 6.1. Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$. Le *produit vectoriel* de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, noté $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ est l'unique vecteur $\mathbf{a} \in E$ tel que

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle.$$

Justification : l'application $E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathbf{x} \mapsto \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x})$$

est une forme linéaire, donc par le théorème de la représentation $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ est bien défini. Rappelons aussi que $\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x})$ ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe, donc le produit vectoriel ne dépend que du choix de l'orientation (et pas du choix de $\mathcal{B}$). On retiendra la propriété

$$\langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}).$$

Soient (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) et (x_1, x_2, x_3) les coordonnées respectives de trois vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{x}$ dans $\mathcal{B}$. Alors en développant le déterminant par rapport à la dernière colonne, on trouve

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} &= x_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle\end{aligned}$$

où $\mathbf{a}$ a pour coordonnées

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \right).$$

Par unicité d'un tel vecteur, ce sont précisément les coordonnées de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ dans $\mathcal{B}$.

Moralité : Quand on travaille en coordonnées dans une base orthonormée directe on retrouve les formules du produit vectoriel usuel dans $\mathbb{R}^3$. En particulier, toutes les propriétés habituelles sont satisfaites :

- $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ est orthogonal à $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ et nul si et seulement si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont colinéaires ;
- Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq 0$ et si $\theta \in [0, \pi]$ désigne l'angle (non-orienté) entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, on a $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = |\sin(\theta)| \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$;
- $\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 \geq 0$. De plus, si $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est orthonormée alors pour tout $\mathbf{w} \in E$ $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est une base orthonormée directe si et seulement si $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

7 Rotations en dimension 3

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3.

Définition 7.1 (Orientation d'un plan de E)**.** Soit P un plan de E et $\mathbf{a} \in E$ un vecteur normal à P. Il existe une unique orientation de P telle que pour toute base orthonormée directe $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ de P, la famille $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|)$ soit une base orthonormée directe de E. On dit que P est orienté par $\mathbf{a}$.

Démonstration. On peut supposer $\mathbf{a}$ normé. oit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ une BON de P. Remarquons que $(\mathcal{B}, \mathbf{a})$ est une BON de E puisque $\mathbf{a}$ est unitaire et normal à P. Quitte à changer $\mathbf{e}_1$ en $-\mathbf{e}_1$ on peut supposer qu'elle est directe (puisque $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{a})$ et $(-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{a})$ n'ont pas la même orientation). On choisit maintenant l'orientation de P telle que $\mathcal{B}$ soit directe. Il reste à montrer que si $\mathcal{B}'$ est une autre base orthonormée directe de P, alors $(\mathcal{B}', \mathbf{a})$ est une base orthonormée directe de E. Soit Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (de déterminant 1 car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont directes). Alors la matrice de passage de $(\mathcal{B}, \mathbf{a})$ à $(\mathcal{B}', \mathbf{a})$ est

$$\left(\begin{array}{c|c} Q & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right),$$

donc aussi de déterminant 1. Ce qui montre que $(\mathcal{B}', \mathbf{a})$ est une base orthonormée directe. $\square$

Proposition 7.2. *Soit $f \in \mathrm{SO}(E) \setminus \{\mathrm{Id}\}$. Alors u est la composition de deux réflexions. De plus, il existe une base orthonormée directe $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } \theta \in]0, 2\pi[.$$

Une telle application est appelée rotation d'angle θ et d'axe (orienté et dirigé par) $\mathbf{w}$. L'ensemble des vecteurs $\mathbf{x}$ invariants par f (c'est-à-dire vérifiant $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$) est la droite $\mathbb{R}\mathbf{w}$. La restriction de f au plan $\mathbf{w}^\perp$ orienté par $\mathbf{w}$ est la rotation d'angle θ.

Remarque. En particulier $\mathrm{Tr}(f) = 2\cos\theta + 1$ (cela détermine l'angle au signe près). Si $\mathbf{w}' = \lambda \mathbf{w}$ avec $\lambda > 0$ on dit aussi que f est d'axe orienté et dirigé par $\mathbf{w}'$.

Démonstration. On a vu que f s'écrivait comme produit de $k \leq 3$ réflexions. Comme le déterminant d'une réflexion vaut -1 et que $\det(f) = 1$, on a nécessairement k pair. Comme le cas $k = 0$ correspond à $u = \mathrm{Id}$, ce qui est exclu, on a $k = 2$. On écrit $f = r \circ r'$, où r et r' sont des réflexions par rapport aux plans F et F' respectivement.

Notons D l'ensemble des points invariants de f. Alors D contient l'intersection de F et F' qui est de dimension ≥ 1 (l'intersection de deux plans dans un espace de dimension 3 n'est jamais réduite à $\{0\}$). En effet, pour tout $\mathbf{x} \in F \cap F'$ on a $r(\mathbf{x}) = \mathbf{x} = r'(\mathbf{x})$, donc $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. De plus, comme $u \neq \mathrm{Id}$, on a $D \neq E$, donc $\dim D \leq 2$. Par l'absurde, montrons que $\dim D = 1$. Sinon soit $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ une base orthonormée de D qu'on complète en une BON $\mathcal{B} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ de E. Comme $\mathrm{Vect}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est stable par f, il en va de même de $\mathbb{R}\mathbf{z}$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\mathbf{z}) = \lambda \mathbf{z}$. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

qui est de déterminant 1, donc $\lambda = 1$ et $u = \mathrm{Id}$: contradiction. On en déduit que D est une droite. Soit $\mathbf{w}$ vecteur unitaire dirigeant D. Comme D est stable par f, son orthogonal $P := D^{\perp}$ aussi. Notons $g = f_{|P}$ la restriction de f à P. On oriente P par $\mathbf{w}$ et on fixe $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ une BON de P. Soit R la matrice de g dans $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Alors la matrice de f dans la BON $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est

$$\left(\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right).$$

Comme le déterminant de cette matrice vaut $1 = \det(R) \times 1$ on a $\det(R) = 1$. Donc $g \in \mathrm{SO}(P)$ est une rotation et R est de la forme R_θ pour un certain $\theta \not\equiv 0$ modulo 2π (puisque $f \neq \mathrm{Id}$). $\square$

Proposition 7.3. *Soit f la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et d'axe $\mathbf{w} \in E$ (avec $\mathbf{w}$ unitaire). On fixe une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E et on note (a, b, c) les coordonnées de $\mathbf{w}$ dans $\mathcal{B}$.*

1. *Si $\mathbf{x}$ est orthogonal à $\mathbf{w}$, on a*

$$f(\mathbf{x}) = \cos\theta\, \mathbf{x} + \sin\theta\, \mathbf{w} \wedge \mathbf{x}.$$

2. *Plus généralement, pour tout $\mathbf{x} \in E$, on a*

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{w} + \cos\theta(\mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{w}) + \sin\theta\, \mathbf{w} \wedge \mathbf{x}.$$

3. *La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est*

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \cos\theta\, I_3 + (1 - \cos\theta) \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a

$$M_{\mathcal{B}}(f) - {}^t(M_{\mathcal{B}}(f)) = 2\sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

1. Si $\mathbf{x} = 0$ le résultat est évident. Sans perte de généralité on peut supposer $\mathbf{x} \neq 0$ et normé (quitte à diviser partout par la norme). Dans le plan $P = \mathbf{x}^{\perp}$ orienté par $\mathbf{w}$ on complète alors $\mathbf{x}$ en une base orthonormée directe $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Puisque $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w})$ est une base orthonormée directe, on a $\mathbf{y} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{x}$. Comme le restriction de f à P est la rotation d'angle θ, on a

$$f(\mathbf{x}) = \cos\theta\, \mathbf{x} + \sin\theta\, \mathbf{y}.$$

D'où le résultat.

2. Soit $\mathbf{x} \in E$ quelconque. Alors

$$\mathbf{x} = \underbrace{\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{w}}_{\in \mathbb{R}\mathbf{w}} + \underbrace{\mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{w}}_{\in \mathbf{w}^{\perp}}$$

On utilise la formule précédente pour $\mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{w}$ (et remarquons que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{w}$ est un point fixe de f) :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{w}) + f(\mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{w}) \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{w} + \cos(\theta)(\mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{w}) + \sin(\theta)\mathbf{w} \wedge (\mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{w}) \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{w} + \cos(\theta)(\mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{w}) + \sin(\theta)\mathbf{w} \wedge \mathbf{x} \end{aligned}$$

car $\mathbf{w} \wedge \mathbf{w} = 0$.

3. La formule précédente donne $f(\mathbf{x}) = \cos(\theta)\mathbf{x} + (1-\cos\theta)\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{w} + \sin\theta\ \mathbf{w} \wedge \mathbf{x}$. On écrit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ et soit φ l'endomorphisme de E défini par $\mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{w}$. Alors $\varphi(\mathbf{e}_1) = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{w}\rangle \mathbf{w} = a\mathbf{w}$. De même $\varphi(\mathbf{e}_2) = b\mathbf{w}$ et $\varphi(\mathbf{e}_3) = c\mathbf{w}$. Donc la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ est
$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$
De même, notant g l'endomorphisme $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{w} \wedge \mathbf{x}$, on a $g(\mathbf{e}_1) = (a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3) \wedge \mathbf{e}_1 = -b\mathbf{e}_3 + c\mathbf{e}_2$. En calculant de même $g(\mathbf{e}_2)$ et $g(\mathbf{e}_3)$ on trouve que la matrice de g dans $\mathcal{B}$ est
$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$
On conclut par la formule $M_{\mathcal{B}}(f) = \cos\theta\ M_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) + (1-\cos\theta)M_{\mathcal{B}}(\varphi) + \sin\theta M_{\mathcal{B}}(g)$.

□

Vérifier qu'une matrice correspond à une rotation.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Ecrivons
$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}.$$
Comment vérifier que $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$? Réponse : on montre que ${}^tMM = I_3$, ce qui revient à :

1. vérifier que les colonnes sont deux à deux orthogonales
2. vérifier que chaque colonne est normée.

Comment vérifier si $M \in SO_3(\mathbb{R})$ ou $M \in \mathcal{O}^-(\mathbb{R})$? Méthode brutale : on calcule $\det(M)$ ($\det(M) = 1$ ssi $M \in SO_3(\mathbb{R})$). La méthode ci-dessous est un peu plus rapide en pratique.

3. On calcule la produit vectoriel entre (a, b, c) et (a', b', c'). Il existe $\varepsilon = \pm$ tel que
$$(a, b, c) \wedge (a', b', c') = \varepsilon(a'', b'', c'').$$
Si $\varepsilon = 1$ alors $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, si $\varepsilon = -1$ alors $M \in \mathcal{O}_3^-(\mathbb{R})$.

Inutile de faire le calcul complet : on repère une coordonnée $\neq 0$ de la dernière colonne, par exemple c'', et on doit juste vérifier si $ab' - a'b$ a le même signe que c'' ou non.

Déterminer les éléments géométriques d'une rotation (première méthode).

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ et $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sa matrice dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$. Déterminer les éléments de f (ou M) c'est déterminer son axe de rotation et son angle.

1. Pour trouver l'axe de rotation, on résout l'équation $MX = X$. On choisit $\mathbf{w}$ de norme 1 dont le vecteur colonne dans $\mathcal{B}$ est X : il dirige l'axe de rotation.
2. M correspond à la rotation d'axe $\mathbf{w}$ et d'angle θ pour un certain $\theta \in [-\pi, \pi]$. Pour trouver θ, on remarque que
$$\mathrm{Tr}(M) = 2\cos\theta + 1.$$
Cela permet de calculer $\cos(\theta)$ (il y a au plus deux angles possibles). Il reste à déterminer le signe de θ, ce qui revient à déterminer le signe de $\sin\theta$. On choisit $\mathbf{x} \in E \setminus \mathbb{R}\mathbf{w}$. Alors le signe de θ est le signe de
$$\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{x}, f(\mathbf{x})).$$
En effet, d'après la Proposition 7.3 on a $f(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{x} + \sin\theta\ \mathbf{w} \wedge \mathbf{x}$ pour des réels α et β (qu'on n'a pas besoin d'expliciter ici). Donc
$$\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = \sin\theta\ \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{w} \wedge \mathbf{x}).$$
Or en posant $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$, la base $(\mathbf{w}, \mathbf{y}, \mathbf{w} \wedge \mathbf{y})$ est une BOND, donc le déterminant ci-dessus est ≥ 0 (il vaut même $\|\mathbf{x}\|^2$).

Déterminer les éléments géométriques d'une rotation (deuxième méthode).
On calcule $M - {}^tM$.

1. Cas 1. Si on trouve 0, alors M est un retournement (c'est-à-dire que $\theta = \pi$). Il suffit alors de trouver l'axe en résolvant $MX = X$ comme précédemment.
2. Cas 2. Sinon $M - {}^tM$ est une matrice antisymétrique de la forme
$$M - {}^tM = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$
avec $\mathbf{w} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. On choisit $\theta \in [0, \pi]$ vérifiant $\mathrm{Tr}(M) = 1 + 2\cos\theta$. Alors f est la rotation d'axe orienté et dirigé par $\mathbf{w}$ et d'angle θ.

Remarques.

1. Le cas $M = {}^tM$ implique que la matrice de f dans n'importe quelle base orthonormée est symétrique. En choisissant la base donnée par la Proposition 7.2 on doit nécessairement avoir $\sin\theta = 0$, donc $\theta = \pi$.
2. La deuxième propriété découle du dernier point de la Proposition 7.3. Attention à la subtilité cependant : le fait d'orienter l'axe par $\mathbf{w}$ choisi comme ci-dessus garantit que l'angle est entre 0 et π et nous épargne la détermination du signe de θ. Il faut donc bien faire attention aux signes : si on trouve par exemple
$$M - {}^tM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
alors il faut prendre le vecteur $\mathbf{w} = (3, 2, -1)$ (et pas $(-3, -2, 1)$).

Exemple 1. Soit f un endomorphisme de E donc la matrice dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ vaut
$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$
On vérifie que $M \in \mathrm{SO}_3(E)$ en montrant que ${}^tMM = I_3$ et $\det(M) = 1$. On a
$$M - {}^tM = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ -5 & 0 & -15 \\ 5 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$
Soit $\mathbf{w} \in E$ le vecteur dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(15/9, -5/9, -5/9)$ (ici on peut même prendre $(3, -1, -1)$ en multipliant par $9/5$ pour avoir quelque chose de plus agréable). Soit $\theta \in [0, \pi]$ l'unique réel vérifiant
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(M) - 1}{2} = \frac{16/9 - 1}{2} = \frac{7}{18}.$$
Alors f est la rotation d'axe orienté et dirigé par $\mathbf{w}$ et d'angle θ.

Exemple 2. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire et orientation canoniques. Déterminons la matrice dans la base canonique de la rotation f d'angle θ orienté et dirigée par $\mathbf{w} = (1, 1, 0)$. Décomposons un vecteur $\mathbf{x} = (x, y, z) \in E$ comme somme d'un vecteur colinéaire à $\mathbf{w}$ (donc invariant par f) d'un vecteur $\mathbf{y}$ orthogonal à $\mathbf{w}$ (dont l'image sera donc $\cos\theta\ \mathbf{y} + \sin\theta\ \mathbf{w} \wedge \mathbf{y}$). Attention comme ici $\mathbf{w}$ n'est pas normalisé il faut bien penser à diviser par la norme dans les formules de la Proposition 7.3. On a
$$\mathbf{x} = \underbrace{\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}}_{\in \mathbb{R}\mathbf{w}} + \underbrace{\mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}}_{=:\mathbf{y} \in \mathbf{w}^\perp},$$

et

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w} + \cos\theta \, \mathbf{y} + \frac{\sin\theta}{\|\mathbf{w}\|} \, \mathbf{w} \wedge \mathbf{y}.$$

D'où

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 2z \end{pmatrix}.$$

On calcule maintenant les coordonnées de $\mathbf{w} \wedge \mathbf{y}$. On a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 2z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} z \\ -z \\ y-x \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $f(\mathbf{x})$ correspond à

$$\frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\cos\theta}{2} \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 2z \end{pmatrix} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} z \\ -z \\ y-x \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+\cos\theta)x + (1-\cos\theta)y + \sqrt{2}\sin\theta z \\ (1-\cos\theta)x + (1+\cos\theta)y - \sqrt{2}\sin\theta z \\ -\sqrt{2}\sin\theta x + \sqrt{2}\sin\theta y + 2\cos\theta z \end{pmatrix}.$$

La matrice de f est donc

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\cos\theta & 1-\cos\theta & \sqrt{2}\sin\theta \\ 1-\cos\theta & 1+\cos\theta & -\sqrt{2}\sin\theta \\ -\sqrt{2}\sin\theta & \sqrt{2}\sin\theta & 2\cos\theta \end{pmatrix}.$$