Algèbre 4 - Cours 6
Groupe orthogonal (suite)

Printemps 2023

Table des matières

5 Réduction des endomorphismes orthogonaux

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Notons que tout sous-espace $F \subseteq E$ est naturellement un espace euclidien (en le munissant de la restriction de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à $F \times F$). Le but de cette partie est d'établir une représentation matricielle "simple" des éléments du groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$.

Proposition 5.1. *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel stable par u, c'est-à-dire tel que $u(F) \subseteq F$. Alors $u(F) = F$ et $u(F^\perp) = F^\perp$. Par ailleurs u induit sur F et $F^\perp$ des endomorphismes orthogonaux. Autrement dit la restriction de u à F (resp. à $F^\perp$) appartient à $\mathcal{O}(F)$ (resp. $\mathcal{O}(F^\perp)$).*

Démonstration. Comme u est inversible, on a $\dim(F) = \dim(u(F))$. Combiné à $u(F) \subseteq F$ on en déduit l'égalité. Soit $\mathbf{y} \in F$. D'après ce qui précède il existe $\mathbf{x} \in F$ tel que $\mathbf{y} = u(\mathbf{x})$. Pour tout $\mathbf{z} \in F^\perp$, on a donc

$$\langle \mathbf{y}, u(\mathbf{z}) \rangle = \langle u(\mathbf{x}), u(\mathbf{z}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = 0,$$

donc $u(\mathbf{z}) \in F^\perp$. On en déduit que $u(F^\perp) \subseteq F^\perp$, d'où l'égalité (première partie de la proposition appliquée à $F^\perp$).

Comme u préserve le produit scalaire, sa restriction à F et $F^\perp$ aussi, donc on a $u_{|F} \in \mathcal{O}(F)$ et $u_{|F^\perp} \in \mathcal{O}(F^\perp)$. □

Proposition 5.2. *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ (pas forcément euclidien) et $u \in \mathcal{L}(V)$. Alors il existe un sous-espace F de V de dimension 1 ou 2 et stable par u.*

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ le polynôme caractéristique de u. On écrit $P = P_1 \cdots P_s$ où $P_1, \ldots, P_s \in \mathbb{R}[X]$ sont irréductibles (donc de degré 1 ou 2). Comme $P(u) = P_1(u) \circ \cdots \circ P_s(u) = 0$ (théorème de Cayley-Hamilton), il existe un entier i entre 1 et s tel que $P_i(u) \notin \mathrm{GL}(V)$. Pour smplicité, notons $Q = P_i$. On peut supposer Q unitaire (quitte à le diviser par son coefficient dominant). Fixons $\mathbf{x} \in \ker(Q(u)) \neq \{0\}$. On distingue deux cas.

Cas 1. $\deg(Q) = 1$. Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $Q = X - a$. Alors $0 = Q(u)(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - a\mathbf{x}$, donc la droite $F = \mathbb{R}\mathbf{x}$ est stable par u.

Cas 2. $\deg(Q) = 2$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $Q = X^2 + bX + c$. On pose $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$. Alors $\dim F \leq 2$ et F est stable par u : en effet, comme $u \in \ker(Q(u))$ on a $u(u(\mathbf{x})) = u^2(\mathbf{x}) = -bu(\mathbf{x}) - c\mathbf{x} \in F$.

□

Proposition 5.3. *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Alors il existe une BON $\mathcal{B}$ et des entiers $s, p, q \in \mathbb{N}$ tels que*

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{\theta_s} & & \\ & & & I_p & \\ & & & & -I_q \end{pmatrix} \qquad \text{où } R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

et $0 < \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_s < \pi$.

Démonstration. On procède par récurrence sur $n = \dim(E)$.

Initialisation. Si $n = 1$: ok (la matrice de u est une matrice de taille 1×1 égale à (1) ou (-1)). Si $n = 2$, on choisit une orientation.

Premier Cas. $u \in \mathcal{O}^-(E)$. Donc u est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D. Soit $\mathcal{B}$ une BON tel que $D = \mathbb{R}\mathbf{x}$. Alors la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Deuxième Cas. $u \in \mathrm{SO}(E)$. Alors il existe $\theta \in [-\pi, \pi]$ tel que u soit la rotation d'angle θ. Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ une BOND. On a vu que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Si $0 \leq \theta \leq \pi$ on a fini (remarquons que si $\theta = 0$ ou π on a $u = \mathrm{Id}$ ou $-\mathrm{Id}$ donc c'est bon aussi). Si $\theta < 0$ on prend $\mathcal{B}' = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Dans cette base la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

avec $\varphi = -\theta \in [0, \pi]$.

Hérédité. Soit $F \subseteq E$ un sous-espace de dimension 1 ou 2 stable par u. On pose $G = F^\perp$. Soit u_F (resp. u_G) la restriction de u à F (resp. à G). On a vu que $u_F \in \mathcal{O}(F)$ et $u_G \in \mathcal{O}(G)$. Comme $1 \leq \dim F, \dim G < n$ on peut appliquer notre hypothèse de récurrence à u_F et u_G. Cela nous donne une BON $\mathcal{B}_F$ de F telle que la matrice de u_F dans $\mathcal{B}_F$ soit de la forme (5.1). Idem pour u_G. Alors quitte à réordonner les vecteurs, on obtient à partir de $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ une BON qui convient. ☐

Rappelons qu'une réflexion de E est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

Proposition 5.4. *$\mathcal{O}(E)$ est engendré par les réflexions. Plus précisément, tout $u \in \mathcal{O}(E)$ s'écrit comme composition d'au plus n réflexions.*

Démonstration. Pour $n = 1$ le résultat est évident (puisque $u = \mathrm{Id}$ ou $-\mathrm{Id}$). Supposons $n \geq 2$. Soit $\mathcal{B}$ une BON de E et $\theta \in]0, \pi[$. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} I_k & & (0) \\ & R_\theta & \\ (0) & & I_{n-2-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & & (0) \\ & S & \\ (0) & & I_{n-2-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & & (0) \\ & S_\theta & \\ (0) & & I_{n-2-k} \end{pmatrix}$$

où $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $S_\theta = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}$. Remarquons que les deux matrices du produit de droite correspondent à des réflexions : en effet, elles sont symétriques et leur carré vaut l'identité, donc elles représentent des symétries orthogonales. De plus leur trace vaut $n - 2 = 2(n-1) - n$. Donc ce sont des symétries orthogonales par rapport à un sous-espace de dimension $n - 1$, c'est-à-dire des réflexions (voir la partie de cours sur les symétries orthogonales pour les propriétés de la trace).

Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ (quelconque) et soit $\mathcal{B}$ une BON de E telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ soit de la forme

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{\theta_s} & & \\ & & & I_p & \\ & & & & -I_q \end{pmatrix}$$

Pour $i = 1, \ldots, s$ et $j = 1, \ldots, q$ on note

$$R'_i := \begin{pmatrix} I_{2i-2} & & \\ & R_{\theta_i} & \\ & & I_{n-2i} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S'_j := \begin{pmatrix} I_{2s+p+j-1} & & \\ & -1 & \\ & & I_{q-j} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$M_{\mathcal{B}}(u) = R'_1 \cdots R'_s S'_1 \cdots S'_q.$$

Par ailleurs, chaque R'_i est le produit de deux matrices représentant des réflexions et chaque S'_j correspond également à une réflexion, donc u est la composition de $2s + q = n - p$ réflexions. $\square$