Algèbre 4 - Cours 4
Groupe orthogonal

Printemps 2023

Table des matières

0 Rappels sur les groupes

Définition 0.1. Un groupe est la donnée d'un ensemble G et d'une loi de composition interne $\star : G \times G \to G$ vérifiant

- $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$ pour tous $f, g, h \in G$ (associativité)
- Il existe $e \in G$ tel que $e \star g = g \star e = e$ pour tout $g \in G$ (élément neutre)
- Pour tout $g \in G$ il existe $h \in G$ (noté g^{-1}) tel que $g \star h = h \star g = e$ (inverse).

Définition 0.2. Un sous-groupe d'un groupe $(G, \star)$ est un ensemble $H \subseteq G$ tel que

- $e \in H$
- Pour tous $f, g \in H$ on a $f \star g \in H$ (stable par $\star$)
- Pour tout $g \in H$ on a $g^{-1} \in H$ (stable par passage à l'inverse).

En particulier $(H, \star)$ est lui-même un groupe.

Exemples. (de groupes)

- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}^n, +)$, $(\mathbb{R}^*, \times) \cdots$
- $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ (endomorphismes inversibles d'un ev E muni de la composition de fonctions).
- $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ (matrices carrées inversibles pour la multiplication matricielle).
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

1 Définitions

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

Définition 1.1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est *orthogonal* s'il préserve le produit scalaire, c'est-à-dire si pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ on a

$$\langle u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

Remarque. Tout endormorpshime orthogonal u préserve l'orthogonalité (d'où la terminologie). En effet, pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y}) \rangle = 0 \Leftrightarrow u(\mathbf{x}) \perp u(\mathbf{y}).$$

Proposition 1.2. *Un endomorphisme u est orthogonal si et seulement si il préserve la norme, c'est-à-dire si pour tout $\mathbf{x} \in E$, on a $\|u(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$. On dit que c'est une isométrie vectorielle.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Alors $\langle u(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ implique $\|u(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ en passant à la racine carrée. Donc u préserve la norme. Réciproquement, si u préserve la norme, alors il préserve aussi le produit scalaire en utilisant la formule de polarisation :

$$\begin{aligned} 4\langle u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y}) \rangle = \|u(\mathbf{x}) + u(\mathbf{y})\|^2 - \|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})\|^2 &= \|u(\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 - \|u(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 \\ &= \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \\ &= 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle. \end{aligned}$$

□

Remarque. Si $u \in \mathcal{O}(E)$ alors u préserve aussi les angles puisque u préserve la norme et le produit scalaire, et que l'angle $\theta \in [0, \pi]$ entre deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de E est défini par la formule

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}.$$

L'angle entre $u(\mathbf{x})$ et $u(\mathbf{y})$ est donc encore θ.

Exemples. Isométries dans $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel.

- Rotation d'angle θ.
- Symétries orthogonales par rapport à une droite.

Proposition 1.3. *$\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ appelé groupe orthogonal. En particulier :*

- *Tout endormorphisme de $\mathcal{O}(E)$ est inversible (donc $\mathcal{O}(E) \subseteq \mathrm{GL}(E)$)*
- *Pour tout $f \in \mathcal{O}(E)$ on a $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.*
- *Pour tous $f, g \in \mathcal{O}(E)$ on a $f \circ g \in \mathcal{O}(E)$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ et soit $\mathbf{x} \in \ker f$. Alors $\|\mathbf{x}\| = \|f(\mathbf{x})\| = 0$, donc $\mathbf{x} = 0$. D'où $f \in \mathrm{GL}(E)$. On a aussi clairement $\mathrm{Id} \in \mathcal{O}(E)$. De plus, pour tous $f, g \in \mathcal{O}(E)$ et tous $\mathbf{x} \in E$ on a

$$\|f(g(\mathbf{x}))\| = \|g(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|,$$

donc $f \circ g$ préserve la norme. On en déduit que $f \circ g \in \mathcal{O}(E)$. Enfin, on a aussi

$$\|f^{-1}(\mathbf{x})\| = \|f(f^{-1}(\mathbf{x}))\| = \|\mathbf{x}\|,$$

donc $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$. □

Proposition 1.4. *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Un endomorphisme u de E est orthogonal si et seulement si l'image de $\mathcal{B}$ par u est une base orthonormée.*

Démonstration. $\Rightarrow$. Supposons d'abord u orthogonal. C'est un isomorphisme qui conserve la norme, donc l'image de $\mathcal{B}$ est encore une base et ses éléments sont de norme 1. Comme u préserve le produit scalaire, il préserve aussi l'orthogonalité, donc l'image de $\mathcal{B}$ est bien une base orthonormée.

$\Leftarrow$. Réciproquement, supposons que l'image de $\mathcal{B}$ est une base orthonormée et écrivons $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Soit $\mathbf{x} \in E$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. Comme $(u(\mathbf{e}_1), \ldots, u(\mathbf{e}_n))$ et $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ sont des bases orthonormées, on a

$$\|u(\mathbf{x})\|^2 = \Big\| u\Big(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \Big) \Big\|^2 = \Big\| \sum_{i=1}^n x_i u(\mathbf{e}_i) \Big\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|\mathbf{x}\|^2.$$

Donc u préserve la norme, donc est orthogonal. □