Algèbre 4 - Cours 3
Orthogonalité (suite)

Printemps 2023

Table des matières

6 Symétries orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.

Définition 6.1. Soit F un sous-espace de E. La *symétrie orthogonale* par rapport à F est l'application $s : E \to E$ qui à tout $\mathbf{x} \in E$, qui se décompose de manière unique comme $\mathbf{x} = \mathbf{x}_F + \mathbf{y}$ avec $\mathbf{x}_F \in F$ et $\mathbf{y} \in F^\perp$, associe $s(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_F - \mathbf{y}$. Si F est une droite, on dit que s est un *retournement*. Si F est un hyperplan (c'est-à-dire un sous-espace de dimension $\dim E - 1$), on dit que c'est une *réflexion*.

Proposition 6.2. *Soit F un sous-espace de E. On note s la symétrie orthogonale par rapport à F et p la projection orthogonale sur F.*

1. *Pour tout $\mathbf{x} \in F$, on a $s(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ et pour tout $\mathbf{x} \in F^\perp$, on a $s(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$.*
2. *$s \circ s = Id$, en particulier s est bijective.*
3. *$s = 2p - Id$.*
4. *Soit $k = \dim F$. Si $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est une base de E telle que $\mathcal{B}_1$ soit une base de F et $\mathcal{B}_2$ une base de $F^\perp$, alors la matrice de s dans $\mathcal{B}'$ est*
$$S = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$
5. *La matrice S de s dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique et vérifie $S^2 = I_n$.*
6. *Réciproquement, toute matrice symétrique S vérifiant $S^2 = I_n$ est la matrice (dans la base $\mathcal{B}$) d'une symétrie orthogonale.*

Démonstration. Soit $\mathbf{x} \in E$. On écrit $\mathbf{x} = \mathbf{x}_F + \mathbf{y}$ avec $\mathbf{x}_F \in F$ et $\mathbf{y} \in F^\perp$.

1. Immédiat par définition de s.
2. On a $s(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_F - \mathbf{y}$ et $s(s(\mathbf{x})) = s(\mathbf{x}_F - \mathbf{y}) = \mathbf{x}_F + \mathbf{y} = \mathbf{x}$.

3. Par définition de p on a $2p(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = 2\mathbf{x}_F - (\mathbf{x}_F + \mathbf{y}) = \mathbf{x}_F - \mathbf{y} = s(\mathbf{x})$.
4. Pour tout élément $\mathbf{f}$ de $\mathcal{B}_1$ on a $s(\mathbf{f}) = \mathbf{f}$ et pour tout $\mathbf{f} \in \mathcal{B}_2$ on a $s(\mathbf{f}) = -\mathbf{f}$. On en déduit que $M_{\mathcal{B}'}(s)$ a bien la forme attendue.
5. Soit P la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$. On a vu que P était symétrique. Donc
$$S = 2P - \mathrm{I}_n$$
est aussi symétrique.
6. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $S^2 = I_n$. On pose $P = (S + I_n)/2$. On vérifie que P est symétrique et vérifie $P^2 = P$. Donc c'est la matrice (dans $\mathcal{B}$) d'une projection orthogonale p sur un certain sous-espace F. Alors $s := 2p - \mathrm{Id}$ est la symétrie orthogonale par rapport à F et sa matrice dans $\mathcal{B}$ est bien S.

□

Corollaire 6.3. *Soit F un sous-espace de dimension m et s la symétrie orthogonale par rapport à F. Alors* $\det(s) = (-1)^{n-m}$ *et* $Tr(s) = 2m - n$.

Exemple(s). $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. Soit F la droite d'équation $y = 3x$. Déterminez les matrices de la projection orthogonale p sur F et de la symétrie orthogonale s par rapport à F (dans la base canonique).

Solution. Un vecteur directeur de F est $\mathbf{a} = (1, 3)$. On note A la matrice-colonne associée. Soit P la matrice de p et S la matrice de s. D'après le cours on a

$$P = \frac{A^t A}{{}^t A A} = \frac{1}{1 \times 1 + 3 \times 3} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Puisque $s = 2p - \mathrm{Id}$ on en déduit

$$S = 2P - I_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Deuxième méthode. On fait le calcul dans la base $\mathcal{B}' = \{(1, 3), \underbrace{(3, -1)}_{\in F^\perp}\}$. On a

$$M_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit ensuite que

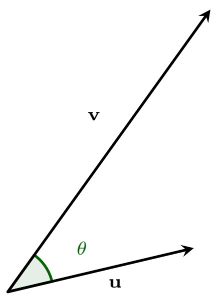
$$P = Q^{-1} M_{\mathcal{B}'}(p) Q \quad \text{et} \quad S = Q^{-1} M_{\mathcal{B}'}(s) Q.$$

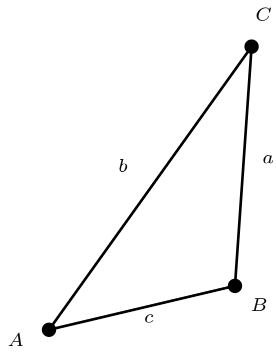
Rappel. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice inversible. Alors

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

7 Angles dans un espace euclidien

Supposons que $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ non nuls et $\theta \in [0, \pi]$ l'angle entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.





Il est connu que θ vérifie
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \cos\theta \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|. \tag{7.1}$$
On peut facilement démontrer cette formule à l'aide de la loi des cosinus (théorème d'Al-Kashi) : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$, et en développant $a^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$.

Eq. (7.1) est encore valable dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel puisqu'on se ramène à travailler dans le plan $\mathrm{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. On va maintenant se servir de cette formule pour définir la notion d'angle dans un espace euclidien abstrait.

Définition 7.1. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\| \cdot \|$ la norme associée. Etant donnés $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E \setminus \{0\}$, on définit l'angle entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ comme étant l'unique $\theta \in [0, \pi]$ vérifiant
$$\cos(\theta) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Remarques.

- Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle / (\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|) \in [-1, 1]$, donc θ est bien défini (et unique car $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est bijective).
- Attention, la notion d'angle dépend du choix du produit scalaire ! (comme on a vu que la notion d'orthogonalité dépendait du choix du produit scalaire).
- Avec cette définition on a bien que $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \theta = \pi/2$ (et on en déduit facilement le théorème de Pythagore).

8 Rappels (espace dual E^*)

Dans cette partie $\mathbb{K}$ désigne un corps (typiquement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 8.1. On note $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$ (parfois aussi noté $\mathrm{End}(E)$) l'espace des endomorphismes de E. On note $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'espace des formes linéaires sur E.

Exemples. (de formes linéaires)

- $E = \mathbb{R}^n$. La fonction i-ème coordonnées $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ est une forme linéaire sur E.
- $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ espace des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Alors l'application $f \mapsto f(a)$ est une forme linéaire sur E (évaluation en a).

- $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$). Alors $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$ est une forme linéaire sur E.
- $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'application $f \mapsto f'(0)$ est une forme linéaire.

Proposition 8.2. *Soit $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ une base de E. On définit $e_i^* \in E^*$ par la formule*

$$e_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

(δ_{ij} est appelé symbole de Kronecker). Alors $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. En particulier, E et E^* sont isomorphes et $\dim E^* = \dim E$.

Remarque. e_i^* est la forme linéaire qui associe à un point $\mathbf{x} \in E$ sa i-ème coordonnée dans la base $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Démonstration. Montrons que $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*.

Libre. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 e_1^* + \cdots + \lambda_n e_n^* = 0$. On évalue en $\mathbf{e}_j$ pour $j = 1, \ldots, n$, ce qui donne

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \times \underbrace{e_i^*(\mathbf{e}_j)}_{=0 \text{ si } i \neq j} = \lambda_j.$$

Donc $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est bien libre.

Génératrice. Soit $f \in E^*$. On pose

$$g = f - \sum_{i=1}^n \underbrace{f(\mathbf{e}_i)}_{\in \mathbb{K}} e_i^* \in E^*.$$

Alors pour $j = 1, \ldots, n$ on a

$$g(\mathbf{e}_j) = f(\mathbf{e}_j) - \sum_{i=1}^n f(\mathbf{e}_i) \times \underbrace{e_i^*(\mathbf{e}_j)}_{=0 \text{ si } i \neq j} = f(\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{e}_j) = 0,$$

donc $g = 0$, ou encore $f = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{e}_i) e_i^*$. □

Remarque. Attention, en dimension infinie E^* est toujours “plus grand” que E (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'application linéaire surjective $E \to E^*$).

9 Equations d'un hyperplan

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n.

Définition 9.1. On appelle *hyperplan* de E tout sous-espace de dimension $n - 1$. On appelle *vecteur normal* à un hyperplan H de E tout vecteur non nul orthogonal à H.

Notation. Soit $\mathbf{a} \in E \setminus \{0\}$. On note $\varphi_{\mathbf{a}} : E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$.

Proposition 9.2. *Soit $\mathbf{a} \in E \setminus \{0\}$. Alors $\ker(\varphi_{\mathbf{a}}) = \{\mathbf{a}\}^\perp$ est un hyperplan de E.*

Démonstration. Pour tout $\mathbf{x} \in E$, on a $\mathbf{x} \in \ker(\varphi_{\mathbf{a}}) \Leftrightarrow \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{a}$. De plus, $\dim(\mathrm{Vect}(\mathbf{a})^\perp) = \dim E - \dim \mathrm{Vect}(\mathbf{a}) = n - 1$, donc c'est un hyperplan de E. □

Proposition 9.3. *Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, H un hyperplan et $\mathbf{a} \in E \setminus \{0\}$ de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathcal{B}$. S'équivalent* *(i) H admet pour équation dans $\mathcal{B}$:*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

(ii) $\mathbf{a}$ *est un vecteur normal à H.*

(iii) $H = \ker \varphi_{\mathbf{a}}$.

Démonstration. (iii) $\Leftrightarrow$ (i). Soit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ (dans $\mathcal{B}$). On note H l'ensemble des $\mathbf{x}$ vérifiant $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. Alors puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a

$$\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n,$$

donc $(\mathbf{x} \in \ker \varphi_{\mathbf{a}}) \Leftrightarrow (\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0) \Leftrightarrow (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0) \Leftrightarrow \mathbf{x} \in H$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Si $\mathbf{a} \perp H$, alors pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ dans H on a $0 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$, donc $\mathbf{x} \in \ker \varphi_{\mathbf{a}}$. D'où $H \subseteq \ker \varphi_{\mathbf{a}}$. Et comme $\dim H = n-1 = \dim \varphi_{\mathbf{a}}$ (le noyau d'une forme linéaire non nulle est toujours un hyperplan en vertu du théorème du rang : $\dim \ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = \dim E$), on déduit que $H = \ker \varphi_{\mathbf{a}}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Supposons $H = \ker \varphi_{\mathbf{a}}$. Alors pour tout $\mathbf{x} \in H$ on a $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0$, donc $\mathbf{a} \perp H$. □

Exemple. Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$. Le plan orthogonal à $\mathbf{a}$ a pour équation

$$x + 2y - z = 0.$$

10 Dualité dans un espace euclidien

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Le résultat suivant est à retenir car très utile (notamment pour définir des objets tels l'adjoint ou le produit mixte).

Théorème 10.1. *(Représentation) L'application $E \to E^*$ définie par $\mathbf{a} \mapsto \varphi_{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a}, \cdot \rangle$ est un isomorphisme d'espace vectoriel. En particulier, pour toute forme linéaire f sur E il existe un unique $\mathbf{a} \in E$ tel que $f = \varphi_{\mathbf{a}}$.*

Démonstration.
Première méthode.
Unicité. Supposons qu'il existe $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ tels que $\varphi_{\mathbf{a}} = \varphi_{\mathbf{b}}$. Alors pour tout $\mathbf{x} \in E$ on a

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \quad \text{c'est-à-dire} \quad \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle = 0.$$

Donc $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in E^{\perp} = \{0\}$, d'où $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Existence. Si $f = 0$ il suffit de prendre $\mathbf{a} = 0$. Si $f \neq 0$, alors $H = \ker f$ est un hyperplan de E. C'est aussi le noyau de la forme linéaire $\varphi_{\mathbf{a}}$, où $\mathbf{a}$ est un vecteur normal à H. On pose $\lambda = f(\mathbf{a})/\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$ et $g = f - \lambda\varphi_{\mathbf{a}}$. Alors g est une forme linéaire dont le noyau contient H. De plus, par choix de λ on a $g(\mathbf{a}) = 0$, donc $\ker g$ contient $H + \mathbb{R}\mathbf{a} = E$, c'est-à-dire $g = 0$. D'où $f = \lambda\varphi_{\mathbf{a}} = \varphi_{\lambda\mathbf{a}}$.

Deuxième méthode (abstraite).

L'application $\Phi : E \to E^*$ définie par $\Phi(\mathbf{a}) = \varphi_{\mathbf{a}}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire.

- Φ est injective car $\varphi_{\mathbf{a}} = 0$ implique en particulier $\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$, donc $\mathbf{a} = 0$.
- Par ailleurs $\dim E = \dim E^*$, donc Φ est un isomorphisme. Donc toute forme linéaire s'écrit de manière unique sous la forme $\varphi_{\mathbf{a}}$.

□