Algèbre 4 - Cours 3
Orthogonalité (suite)

Printemps 2023

Table des matières

4 Projections orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On note $\| \cdot \|$ la norme associée. Rappelons que pour tout sous-espace F de E, on a $E = F \oplus F^\perp$. En particulier, tout vecteur $\mathbf{x} \in E$ s'écrit de manière unique

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_F + \mathbf{y}, \quad \text{avec } \mathbf{x}_F \in F \text{ et } \mathbf{y} \in F^\perp. \tag{4.1}$$

Définition 4.1. On appelle *projection orthogonale sur F* l'application $p : E \to F$ définie pour tout $\mathbf{x} \in E$ par $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_F$, où $\mathbf{x}_F$ vérifie (4.1). On dit aussi que p est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$. Autrement dit, $p(\mathbf{x})$ est l'unique vecteur de F vérifiant $\mathbf{x} - p(\mathbf{x}) \in F^\perp$.

Proposition 4.2. *Soit F un sous-espace de E de dimension k et $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)$ une base orthonormée de F. Le projeté orthogonal d'un vecteur $\mathbf{x} \in E$ sur F est*

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{x}, \mathbf{f}_i \rangle \mathbf{f}_i.$$

Démonstration. Décomposons $p(\mathbf{x})$ dans la base $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)$:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{f}_i$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbf{x} - p(\mathbf{x}) \in F^\perp$, pour $i = 1, \ldots, k$ on a $\langle \mathbf{x} - p(\mathbf{x}), \mathbf{f}_i \rangle = 0$, d'où

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{f}_i \rangle = \langle p(\mathbf{x}), \mathbf{f}_i \rangle = \lambda_i.$$

□

Exemple(s)(Projection orthogonale sur une droite). Soit $\mathbf{a} \in E \setminus \{0\}$. La projection orthogonale d'un point $\mathbf{x} \in E$ sur la droite engendrée par $\mathbf{a}$ est

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a}.$$

Démonstration.
Première méthode. On normalise $\mathbf{a}$ pour pouvoir appliquer la proposition précédente. On pose $\mathbf{b} = \mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$. On trouve

$$p(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{b} = \left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \right\rangle \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a}.$$

Deuxième méthode. On refait à la main. On écrit $p(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{a}$. On a la condition $\mathbf{x} - p(\mathbf{x}) \perp \mathbf{a}$, c'est-à-dire $\langle \mathbf{x} - p(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle = 0$, d'où on tire

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = \langle p(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle,$$

donc $\lambda = \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle / \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$. □

Exemple(s). Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ et $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$. Déterminez la projection orthogonale $p(\mathbf{u})$ de $\mathbf{u}$ sur la droite $\mathbb{R}\mathbf{a}$.

On écrit $p(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{a}$. On veut $\mathbf{u} - p(\mathbf{u}) \perp \mathbf{a}$, c'est-à-dire $\langle \mathbf{u} - \lambda \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$, d'où

$$\lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \langle p(\mathbf{u}), \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle = 2 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 3 = 3.$$

D'un autre côté on a $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 2^2 + 1^1 + 1^2 = 6$. Donc finalement $\lambda = 3/6 = 1/2$, et

$$p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(2, 1, 1) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Proposition 4.3. *Soit F un sous-espace de $\mathbb{R}$ et $p : E \to F$ la projection orthogonale sur F.*

1. $\mathbf{x} \in F \Leftrightarrow p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. *L'ensemble des points fixe de p est donc F, et en particulier, $p \circ p = p$.*
2. $\mathrm{Im}(p) = F$ *et* $\ker(p) = F^\perp = \mathrm{Im}(p)^\perp$. *En particulier, le rang de p vaut* $\mathrm{rg}(p) = \dim F$.

Remarque. Rappel : le *rang* d'une application linéaire est la dimension de son image.

Démonstration. 1. Soit $\mathbf{x} \in E$. On écrit $\mathbf{x} = \mathbf{x}_F + \mathbf{y}$ avec $\mathbf{x}_F \in F$ et $\mathbf{y} \in F^\perp$. Alors

$$(\mathbf{x} \in F) \Leftrightarrow (\mathbf{y} = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{x}_F + \mathbf{y} = \mathbf{x}_F) \Leftrightarrow (\mathbf{x} = p(\mathbf{x})).$$

En particulier, puisque pour tout $\mathbf{x} \in E$ on a $p(\mathbf{x}) \in F$, on en déduit que $p(p(\mathbf{x})) = p(\mathbf{x})$.

2. Par ce qui précède, pour tout $\mathbf{x} \in F$ on a $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \in \mathrm{Im}(p)$, d'où $\mathrm{Im}(p) = F$. Si $\mathbf{x} \in F^\perp$, par définition de p on a $p(\mathbf{x}) = 0$ (puisque $\mathbf{x} = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{\mathbf{x}}_{\in F^\perp}$). Réciproquement, si $p(\mathbf{x}) = 0$, alors $\mathbf{x} - p(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \in F^\perp$. □

Définition 4.4. Soit $\mathbf{x} \in E$ et F un sous-espace de E. On appelle distance de $\mathbf{x}$ à F, notée $d(\mathbf{x}, F)$, le nombre

$$d(\mathbf{x}, F) = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \; ; \; \mathbf{y} \in F\} \geq 0.$$

Remarque. On a $d(\mathbf{x}, F) = 0$ si et seulement si $\mathbf{x} \in F$.

Proposition 4.5. *Soit F un sous-espace de E et $p : E \to F$ la projection orthogonale sur F. Pour tout $\mathbf{x} \in E$, on a*

$$\|\mathbf{x} - p(\mathbf{x})\| = d(\mathbf{x}, F),$$

en particulier la distance de $\mathbf{x}$ à F est atteinte.

Remarque. (HP) Etant donnée une norme quelconque N sur E, on peut définir la distance de $\mathbf{x}$ à F relativement à N par la formule

$$d_N(\mathbf{x}, F) = \inf\{N(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \; ; \; \mathbf{y} \in F\}.$$

Dans ce cas la distance de $\mathbf{x}$ à F est encore atteinte, donc l'inf peut être remplacé par un min (pour le prouver on peut utiliser des résultats de compacité ; attention, l'hypothèse que E est de dimension finie est nécessaire ici).

Remarque. Attention : dans la Proposition 4.5 $\|\cdot\|$ est la norme associée à $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et pas n'importe quelle norme ! !

Démonstration. Soit $\mathbf{x} \in E$. On note $\mathbf{y} = p(\mathbf{x})$. Etant donné $\mathbf{z} \in F$, par Pythagore on a

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^2 = \|\underbrace{(\mathbf{x}-\mathbf{y})}_{\in F^\perp} + \underbrace{(\mathbf{y}-\mathbf{z})}_{\in F}\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|^2 \geq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2.$$

On en déduit que $\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| \geq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ avec égalité si et seulement si $\mathbf{z} = \mathbf{y}$. □

Exemple(s). Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit $\mathbf{a} = (2,1,1)$ et $\mathbf{u} = (1,-2,3)$. Déterminez la distance de $\mathbf{u}$ à la droite engendrée par $\mathbf{a}$.

On a vu que la projection orthogonale $p(\mathbf{u})$ de $\mathbf{u}$ sur $\mathbb{R}\mathbf{a}$ était $(1, 1/2, 1/2)$. On en déduit que la distance de $\mathbf{u}$ à $\mathbb{R}\mathbf{a}$ est

$$\|\mathbf{u} - p(\mathbf{u})\| = \|(0,-5/2,5/2)\| = \sqrt{0+(5/2)^2+(5/2)^2} = \sqrt{2\times\frac{25}{4}} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

5 Matrice d'une projection orthogonale

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n. On note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ une base orthonormée E.

En utilisant que pour toute projection orthogonale p, on a $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in F = \mathrm{Im}(p)$ et $p(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in F^\perp$, on déduit facilement le résultat suivant.

Proposition 5.1. *Soit F un sous-espace de E de dimension k et p la projection orthogonale sur F. Soit $\mathcal{B}_1$ (resp. $\mathcal{B}_2$) une base de F (resp. $F^\perp$). On note $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ (base de E). Alors la matrice de p dans la base $\mathcal{B}'$ est*

$$P = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

où $I_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ désigne la matrice identité. En particulier $Tr(p) = k = \dim F$.

Rappel. Le déterminant (resp. la trace) d'un endormorphisme $f : E \to E$ est le déterminant (resp. la trace) de sa matrice dans n'importe quelle base de E (cela ne dépend pas du choix de la base).

Le but est maintenant d'exprimer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ (orthonormée mais sans lien a priori avec p).

Définition 5.2. Soit $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)$ une famille de E (par forcément libre). La matrice de Gram associée est

$$M = \begin{pmatrix} \langle\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_1\rangle & \langle\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2\rangle & \cdots & \langle\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_k\rangle \\ \langle\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_1\rangle & \langle\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_2\rangle & \cdots & \langle\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_k\rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle\mathbf{f}_k,\mathbf{f}_1\rangle & \langle\mathbf{f}_k,\mathbf{f}_2\rangle & \ldots & \langle\mathbf{f}_k,\mathbf{f}_k\rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}),$$

et le déterminant de Gram est $G(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k) = \det M$.

Proposition 5.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k$ écrits dans la base $\mathcal{B}$. Alors la matrice de Gram associée à $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)$ est $M = {}^tAA$. Par ailleurs, M est inversible si et seulement si $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)$ est libre.*

Démonstration. On note C_j la j-ème colonne de A ($j = 1, \dots, k$). Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ dont les vecteurs colonnes dans la base $\mathcal{B}$ sont $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^tXY$. En particulier, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, le coefficient d'indice (i, j) de M est par définition $\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle = {}^tC_iC_j$, ce qui est précisément le coefficient d'indice (i, j) de ${}^tAA$, d'où $M = {}^tAA$.

On pose $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$ et on note $G_1, \dots, G_k$ les colonnes de M. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Notons que pour tout $\mathbf{x} \in F$, on a $\mathbf{x} = 0$ si et seulement si $\mathbf{x} \perp F$. D'où

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{f}_j}_{\in F} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{f}_j \perp F \Leftrightarrow \left\langle \mathbf{f}_i, \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{f}_j \right\rangle = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, k \\
\Leftrightarrow \sum_{j=1}^k \lambda_j \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, k \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k \lambda_j \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_j \rangle \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j \langle \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_j \rangle \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \begin{pmatrix} \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_j \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_j \rangle \end{pmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow \sum_{j=1}^k \lambda_j G_j = 0.
\end{aligned}$$

D'où $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$ est liée si et seulement si $(G_1, \dots, G_k)$ est liée ($\Leftrightarrow \det M = 0$). □

Théorème 5.4. *Soit F un sous-espace de E de dimension k et $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$ une base quelconque de F. On note $A \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ la matrice de taille $n \times k$ dont les colonnes sont les vecteurs $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$ écrits dans la base $\mathcal{B}$. Alors matrice de la projection orthogonale p sur F (dans la base $\mathcal{B}$) est*

$$P := M_{\mathcal{B}}(p) := A({}^tAA)^{-1}({}^tA).$$

Démonstration. Notons d'abord que ${}^tAA$ est la matrice de Gram de la base $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$, donc elle est bien inversible d'après la Proposition 5.3, et P est bien définie.

Remarque préliminaire. Soit $p, q, m \geq 1$ des entiers, $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes. On note $N = \mathrm{mat}(C_1, \dots, C_m) \in \mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont $C_1, \dots, C_m$. Alors

$$MN = \mathrm{mat}(MC_1, \dots, MC_m).$$

Soient $(\mathbf{f}_{k+1}, \dots, \mathbf{f}_n)$ base $F^\perp$ (de sorte que $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ est une base de E). On note $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes qui correspondent à $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ écrits dans la base $\mathcal{B}$. Rappelons que $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ si $\mathbf{x} \in F$, et $p(\mathbf{x}) = 0$ pour $\mathbf{x} \in F^\perp$. Donc

$$M_{\mathcal{B}}(p) \times \mathrm{mat}(C_1, \dots, C_n) = \mathrm{mat}(M_{\mathcal{B}}(p)C_1, \dots, M_{\mathcal{B}}(p)C_n) = \big(C_1 \cdots C_k \; 0 \cdots 0\big) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Puisque $\mathrm{mat}(C_1, \dots, C_n)$ est inversible (car $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ est une base), pour montrer la proposition il suffit de montrer que pour $P = A({}^tAA)^{-1}({}^tA)$ on a aussi

$$P \times \mathrm{mat}(C_1, \dots, C_n)\big(= \mathrm{mat}(PC_1, \dots, PC_n)\big) = \big(C_1 \cdots C_k \; 0 \cdots 0\big).$$

Comme $C_1, \dots, C_k$ sont les colonnes de A, on a déjà

$$P \times \mathrm{mat}(C_1, \dots, C_k) = PA = A({}^tAA)^{-1}({}^tAA) = A,$$

donc $PC_j = C_j$ pour $j = 1, \ldots, k$.

Soit maintenant $j \in \{k+1, \ldots, n\}$. Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ (de vecteur colonne X et Y dans $\mathcal{B}$ resp.), on a les équivalences $(\mathbf{x} \perp \mathbf{y}) \Leftrightarrow (X \perp Y) \Leftrightarrow ({}^tXY = 0)$. En particulier puisque $\mathbf{f}_j \perp F$, on a ${}^tC_iC_j = 0$ pour $i = 1, \ldots, k$. On trouve alors

$$ {}^tAC_j = \begin{pmatrix} {}^tC_1C_j \\ \vdots \\ {}^tC_kC_j \end{pmatrix} = 0. $$

D'où $PC_j = A({}^tAA)^{-1}({}^tAC_j) = 0$. $\square$

La formule du théorème précédent (et sa preuve) se simplifie lorsque F est une droite de E.

Proposition 5.5 (**Projection orthogonale sur une droite**). *Soit* $\mathbf{a} \in E \setminus \{0\}$. *On note* A *la matrice-colonne corrrespondant à* $\mathbf{a}$ *écrit dans la base* $\mathcal{B}$. *Alors la projection orthogonale sur la droite* $\mathbb{R}\mathbf{a}$ *a pour matrice dans* $\mathcal{B}$ *:*

$$ P = \frac{A({}^tA)}{{}^tAA} = \frac{A({}^tA)}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}). $$

Démonstration. Comme A est une matrice-colonne (et que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée), on a ${}^tAA = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$ (matrice 1×1), donc $({}^tAA)^{-1} = 1/\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$. On conclut avec le Théorème 5.4. $\square$

Exemple(s). $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. On pose $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$. Calculez la matrice (dans la base canonique) de la projection orthogonale p sur la droite $\mathbb{R}\mathbf{a}$. En déduire l'image de la projection de $\mathbf{x} = (3, 1, 0)$ sur $\mathbb{R}\mathbf{a}$. Déterminez l'image et le noyau de p.

La matrice de p est

$$ P = \frac{1}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}. $$

Ecrit dans la base canonique, l'image de $(3, 1, 0)$ est alors

$$ P \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} $$

L'image de p est $\mathbb{R}(1, -2, 3)$ (= l'espace sur lequel on projette). Son noyau est l'orthogonal de l'image. Deux vecteurs orthogonaux à $(1, -2, 3)$ sont par exemple $(2, 1, 0)$ et $(3, 0, -1)$ (calcul immédiat), et ils sont libres, donc forment une base de $\ker(p)$.

Proposition 5.6. *Soit* P *la matrice (dans la base* $\mathcal{B}$*) de la projection orthogonale sur un sous-espace de* E. *Alors*

1. P *est symétrique, c'est-à-dire que* ${}^tP = P$.
2. $P^2 = P$.

Reciproquement, toute matrice P *vérifiant les deux conditions ci-dessus est la matrice (dans la base* $\mathcal{B}$*) de la projection orthogonale sur un certain sous-espace de* E.

Démonstration. On note p la projection orthogonale sur un sous-espace F de E, et P sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. L'identité $p \circ p = p$ se traduit par l'identité matricielle $P^2 = P$. Soit A définie comme dans le Théorème 5.4, de sorte que

$$ P = A({}^tAA)^{-1}({}^tA). $$

En prenant la transposée (et puisque ${}^t({}^tM) = M$, ${}^t(MN) = {}^tN{}^tM$ et ${}^t(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1}$), on trouve

$$\begin{aligned}{}^tP = {}^t\Big(A({}^tAA)^{-1}({}^tA)\Big) = {}^t({}^tA){}^t({}^tAA)^{-1}({}^tA) &= A\big({}^t({}^tAA)\big)^{-1}({}^tA) \\ &= A\big({}^tA \times {}^t({}^tA)\big)^{-1}({}^tA) \\ &= A({}^tAA)^{-1}({}^tA) = P.\end{aligned}$$

Soit maintenant P telle que ${}^tP = P$ et $P^2 = P$. On note f l'endomorphisme de E tel que $M_{\mathcal{B}}(f) = P$ et $F \subseteq E$ l'image de f. Montrons que f est la projection orthogonale sur F. Soit $\mathbf{x} \in \ker f$ et $\mathbf{z} \in F$. Il existe $\mathbf{y} \in E$ tel que $\mathbf{z} = f(\mathbf{y})$. On note X, Y, Z les vecteurs-colonne de $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ (resp.) dans la base $\mathcal{B}$. On a $PX = 0$ et $Z = PY$. Alors

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = {}^tXZ = {}^tXPY = {}^tX({}^tP)Y = {}^t(PX)Y = 0.$$

Donc $\mathbf{x} \perp \mathbf{z}$. Comme c'est vrai pour tout $\mathbf{z} \in F$, on a $\mathbf{x} \perp F$. On en déduit que $\ker f \subseteq F^\perp$, et comme $\dim \ker(f) = n - \dim \operatorname{Im}(f) = n - \dim F = \dim F^\perp$, on en déduit que $F^\perp = \ker(f)$. Finallement, puisque $P^2 = P$, on a aussi

$$PZ = P^2Y = PY = Z,$$

d'où $f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$ pour tout $\mathbf{z} \in F$. Soit maintenant $\mathbf{x} \in E$. On écrit $\mathbf{x} = \mathbf{x}_F + \mathbf{y}$ avec $\mathbf{x}_F \in F$ et $\mathbf{y} \in F^\perp = \ker(f)$. Alors par ce qui précède, on a

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_F) + f(\mathbf{z}) = \mathbf{x}_F,$$

donc f est bien la projection orthogonale sur F. □