Algèbre 4 - Cours 2
Orthogonalité

Printemps 2023

Table des matières

1 Vecteurs et sous-espaces orthogonaux

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel (c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension quelconque muni d'un produit scalaire). On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Tout ce qui suit reste valable pour un espace préhilbertien complexe (c'est-à-dire si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire complexe). Le produit scalaire va permettre de définir la notion d'orthogonalité (qui correspond à la notion usuelle lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire canonique).

Définition 1.1.

- On dit que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ sont *orthogonaux*, et on note $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$.
- On dit qu'un vecteur $\mathbf{x} \in E$ est *orthogonal* à un sous-espace F de E, et on note $\mathbf{x} \perp F$, si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$ pour tout $\mathbf{y} \in F$.
- On dit que deux sous-espaces vectoriel F et G de E sont *orthogonaux*, et on note $F \perp G$, si pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in F \times G$ on a $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$.
- Soit n un entier. On dit qu'une famille de points $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ de E est *orthogonale* si $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\rangle = 0$ pour tous i, j avec $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$. Si de plus $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i\rangle = 1$ pour tout i, on dit que cette famille est *orthonormée*.

Remarques.

- La condition $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$ est équivalente à $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle = 0$ (aussi bien sur $\mathbb{R}$ que sur $\mathbb{C}$).
- $F \perp G \Longleftrightarrow G \perp F$.
- $\mathbf{x} \perp \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = 0$, par définition du produit scalaire.
- Le vecteur nul est orthogonal à tout point de E (puisque $\langle \mathbf{x}, 0\rangle = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in E$).
- De même, si $F = \{0\}$ alors $F \perp G$ pour tout sous-espace G de E.
- Si $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ est une famille libre orthogonale, on peut la rendre orthonormée en normalisant chaque $\mathbf{e}_i$, c'est-à-dire en remplaçant $\mathbf{e}_i$ par $\mathbf{e}_i/\|\mathbf{e}_i\|$ pour tout i (le vecteur ainsi obtenu est de norme 1).

Exemple(s)

- Dans $\mathbb{R}^n$. La base canonique $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire usuel) est une famille orthonormée : si $i \neq j$ on a $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$ et $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = 1$ (pour $i, j = 1, \ldots, n$).
- $E = \mathcal{C}([0, 2\pi, \mathbb{R}])$ avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini pour $f, g \in E$ par $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ (exemple en dimension infinie). Alors la famille constituée de la fonction constante égale à 1 et des fonctions $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \sin(nx)$ (pour n entier ≥ 1) est une famille orthogonale.

  Indication : Utilisez les formules $\cos(a)\cos(b) = (\cos(a+b) + \cos(a-b))/2$, $\sin(a)\sin(b) = (\cos(a-b) - \cos(a+b))/2$ et $\sin(a)\cos(b) = (\sin(a+b) + \sin(a-b))/2$ pour pouvoir calculer les intégrales mises en jeu.
- En prenant le même espace que précédemment, la famille constituée de la fonction constante égale à $1/\sqrt{2\pi}$ et des fonctions $x \mapsto \cos(nx)/\sqrt{\pi}$ et $x \mapsto \cos(nx)/\sqrt{\pi}$ pour $n \geq 1$ est orthonormée.

Remarque. On verra que tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\neq \{0\}$ admet une base orthonormée (voir Partie 3).

Proposition 1.2. *Soit n un entier ≥ 1 et $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ une famille de point non nuls deux à deux orthogonaux. Alors cette famille est libre.*

Démonstration. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{z} := \lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n = 0$. Montrons que les λ_i sont tous nuls. Pour $i = 1, \ldots, n$, comme $\mathbf{z} = 0$ on a

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}_i, \lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n \rangle &= \lambda_1\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_1 \rangle + \cdots + \lambda_n\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_n \rangle \quad \text{(par linéarité)} \\ &= 0 + \cdots + \lambda_i\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle + \cdots + 0 \quad (\text{car } \mathbf{x}_i \perp \mathbf{x}_j \text{ si } i \neq j) \\ &= \lambda_i\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle. \end{aligned}$$

Or $\mathbf{x}_i \neq 0$, donc $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle > 0$ (définition du produit scalaire). On en déduit que $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$, donc $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ est libre. □

Notation. Etant donnée une famille $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ de points de E, on note $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$, ou simplement $\mathrm{Vect}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps de base, l'espace vectoriel engendré par les $\mathbf{x}_i$.

Proposition 1.3. *Soient n, m des entiers ≥ 1 et $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ des vecteurs de E. On pose $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ et $G = \mathrm{Vect}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m)$. Alors*

(1.) $F \perp G \iff (\mathbf{x}_i \perp \mathbf{y}_j$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, m)$

(2.) Si $F \perp G$, alors $F \cap G = \{0\}$.

Démonstration.

(1.) $(\Rightarrow)$. Par définition, si $F \perp G$ alors $\mathbf{x}_i \perp \mathbf{y}_j$ pour tout i, j.

$(\Leftarrow)$. Supposons $\mathbf{x}_i \perp \mathbf{y}_j$ pour tout i, j. Soit $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in F \times G$. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \mu_1\mathbf{y}_1 + \cdots + \mu_m\mathbf{y}_m.$$

Par bilinéarité du déterminant + hypothèse d'orthogonalité entre les $\mathbf{x}_i$ et les $\mathbf{y}_j$, on trouve

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \Big\langle \mathbf{x}, \sum_{j=1}^m \mu_j\mathbf{y}_j \Big\rangle = \sum_{j=1}^m \mu_j\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_j \rangle = \sum_{j=1}^m \mu_j \Big\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j \Big\rangle = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mu_j\lambda_i \underbrace{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j \rangle}_{=0} = 0.$$

Donc on a bien $F \perp G$.

(2.) Supposons $F \perp G$ et soit $\mathbf{x} \in F \cap G$. Alors $\underbrace{\mathbf{x}}_{\in F} \perp \underbrace{\mathbf{x}}_{\in G}$ $(\Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0)$, donc $\mathbf{x} = 0$. D'où $F \cap G = \{0\}$.

□

Définition 1.4. Soit $X \subseteq E$ une partie de E. L'orthogonal de X, noté $X^{\perp}$, est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les éléments de X, c'est-à-dire

$$X^{\perp} := \{\mathbf{y} \in E \mid \forall \mathbf{x} \in X, \;\; \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0\}.$$

Etant donné $\mathbf{x} \in E$, on note plus simplement $\mathbf{x}^{\perp}$ à la place de $\{\mathbf{x}\}^{\perp}$.

Proposition 1.5. *Soit $X \subseteq E$. Alors $X^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus, $X^{\perp} = \mathrm{Vect}(X)^{\perp}$.*

Remarque. Pour tout sous-espace X de E, par définition on a $X \perp X^{\perp}$.

Démonstration. Notons d'abord que $0 \in X^{\perp}$. Soient maintenant $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in X^{\perp}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $\mathbf{x} \in X$, on a

$$\langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{z} \rangle = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \mu\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = 0,$$

puisque $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = 0$ par définition de $X^{\perp}$. Donc $\lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{z} \in X^{\perp}$. Cela montre bien que $X^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Montrons maintenant que $X^{\perp} = \mathrm{Vect}(X)^{\perp}$. Comme $X \subseteq \mathrm{Vect}(X)$, on a $\mathrm{Vect}(X)^{\perp} \subseteq X^{\perp}$ (voir la propriété 2. de la Proposition 1.6). Réciproquement, soit $\mathbf{y} \in X^{\perp}$. Alors pour tout $\mathbf{x} \in \mathrm{Vect}(X)$, il existe un entier $k > 0$ et des vecteurs $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in X$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{x}_k$. Comme $\mathbf{y} \in X^{\perp}$, on a $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_i \rangle = 0$ pour $i = 1, \dots, k$, d'où

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, \lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{x}_k \rangle = \lambda_1\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_1 \rangle + \cdots + \lambda_k\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_k \rangle = 0,$$

ce qui implique $\mathbf{y} \in \mathrm{Vect}(X)^{\perp}$. Donc $X^{\perp} \subseteq \mathrm{Vect}(X)^{\perp}$, d'où l'égalité (par double inclusion). □

Proposition 1.6. *Soient $F, G \subseteq E$ deux sous-espaces de E.*

1. *$\{0\}^{\perp} = E$ et $E^{\perp} = \{0\}$.*
2. *Si $F \subseteq G$, alors $G^{\perp} \subseteq F^{\perp}$.*
3. *$F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$ (avec égalité si $\dim E < \infty$).*
4. *$F^{\perp} + G^{\perp} \subseteq (F \cap G)^{\perp}$ (avec égalité si $\dim E < \infty$).*
5. *$F^{\perp} \cap G^{\perp} \subseteq (F + G)^{\perp}$ (avec égalité si $\dim E < \infty$).*

Démonstration. (Laissée en exo durant le CM).

Le cas des égalités en dimension finie sera fait plus tard (argument de dimensions reposant sur la formule $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$ qu'on verra plus tard).

1. Pour tout $\mathbf{x} \in E$, on a $\langle 0, \mathbf{x} \rangle = 0$, donc $\mathbf{x} \in \{0\}^{\perp}$. D'où la première égalité. Soit maintenant $\mathbf{x} \in E^{\perp}$. Alors comme $\mathbf{x} \in E$, on a $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$, ce qui n'est possible que si $\mathbf{x} = 0$. Donc $E^{\perp} = \{0\}$.
2. Supposons $F \subseteq G$. Soit $\mathbf{y} \in G^{\perp}$. Alors pour tout $\mathbf{x} \in G$, on a $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. En particulier, comme $F \subseteq G$, pour tout $\mathbf{x} \in F$ on a $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Donc $\mathbf{y} \in F^{\perp}$. D'où $G^{\perp} \subseteq F^{\perp}$.
3. Posons $H = F^{\perp}$. On a $F \perp H$, donc étant donné $\mathbf{y} \in F$, pour tout $\mathbf{z} \in H$ on a $\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = 0$, ce qui implique que $\mathbf{y} \in H^{\perp} = (F^{\perp})^{\perp}$. D'où $F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$.
4. Soient $\mathbf{x} \in F^{\perp} + G^{\perp}$. On peut écrire $\mathbf{x} = \mathbf{x}_F + \mathbf{x}_G$ avec $\mathbf{x}_F \in F^{\perp}$ et $\mathbf{x}_G \in G^{\perp}$. Alors pour tout $\mathbf{y} \in F \cap G$, on a

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_F + \mathbf{x}_G, \mathbf{y} \rangle = \underbrace{\langle \mathbf{x}_F, \mathbf{y} \rangle}_{=0 \text{ car } \mathbf{y} \in F} + \underbrace{\langle \mathbf{x}_G, \mathbf{y} \rangle}_{=0 \text{ car } \mathbf{y} \in G} = 0,$$

   d'où $\mathbf{x} \in (F \cap G)^{\perp}$. Donc $F^{\perp} + G^{\perp} \subseteq (F \cap G)^{\perp}$.

5. Soient $\mathbf{x} \in F^\perp \cap G^\perp$. Alors pour tout $\mathbf{y} \in F+G$, il existe $(\mathbf{y}_F, \mathbf{y}_G) \in F \times G$ tel que $\mathbf{y} = \mathbf{y}_F + \mathbf{y}_G$, et on a

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}_F + \mathbf{y}_G, \mathbf{x} \rangle = \underbrace{\langle \mathbf{y}_F, \mathbf{x} \rangle}_{=0 \text{ car } \mathbf{x} \in F^\perp} + \underbrace{\langle \mathbf{y}_G, \mathbf{x} \rangle}_{=0 \text{ car } \mathbf{x} \in G^\perp} = 0,$$

d'où $\mathbf{x} \in (F+G)^\perp$. Donc $F^\perp \cap G^\perp \subseteq (F+G)^\perp$.

□

On retiendra que si E est de dimension finie et F, G sont des sous-espaces de E, on a :

$$\boxed{(F^\perp)^\perp = F, \quad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp \quad \text{et} \quad (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp.}$$

Avertissement. En dimension infinie il faut être prudent, les dernières inclusions peuvent être strictes !

Pour la culture. On considère $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$. Soit $F \subsetneq E$ le sous-espace des fonctions polynomiales sur $[0,1]$. Alors $F^\perp = \{0\}$, et donc $(F^\perp)^\perp = E$, d'où $F \subsetneq (F^\perp)^\perp$!

L'égalité $F^\perp = \{0\}$ repose sur le théorème de Weierstraß (qui dit que pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $|f(t) - P(t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [0,1]$). Ce résultat n'est pas exigé dans ce cours.

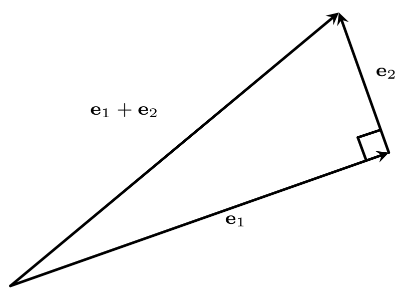
2 Théorème de Pythagore

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel (c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension quelconque muni d'un produit scalaire). On note $\| \cdot \|$ la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposition 2.1. *Soient $k \geq 2$ un entier et $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k \in E$.*

1. $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$ *si et seulement si* $\|\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\|^2 = \|\mathbf{e}_1\|^2 + \|\mathbf{e}_2\|^2$.
2. *SI* $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ *est une famille orthogonale, ALORS* $\|\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_k\|^2 = \|\mathbf{e}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{e}_k\|^2$ *(attention, la réciproque est fausse si $k > 2$).*

Dessin.



Démonstration.

1. On part de la formule

$$\|\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\|^2 = \|\mathbf{e}_1\|^2 + 2\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle + \|\mathbf{e}_2\|^2.$$

On a donc $\|\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\|^2 = \|\mathbf{e}_1\|^2 + \|\mathbf{e}_2\|^2$ ssi $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, ce qui est équivalent par définition à $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$.

2. Supposons $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ orthogonale. On développe $\|\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_k\|^2$. Comme pour tout $i \neq j$ on a $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$, on trouve

$$\|\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_k\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^k \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^k \mathbf{e}_j \right\rangle = \sum_{1 \le i,j \le k} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = \sum_{i=1}^k \|\mathbf{e}_i\|^2.$$

Si vous n'aimez pas les sommes doubles, un raisonnement par récurrence marche aussi.

□

Pourquoi travailler dans une base orthogonale ? Supposons $\dim E = n < \infty$ et que $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ est une base de E. Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ et $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{e}_i$. En général, on a la formule :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{1 \le i,j \le n} x_i y_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle \qquad \left(= \sum_{1 \le i,j \le n} \overline{x_i} y_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle \text{ sur } \mathbb{C}\right).$$

- Si on suppose $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ <u>orthogonale</u>, alors $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$ pour tout $i \neq j$ et la formule précédente se simplifie en

  $$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle \qquad \left(= \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle \text{ sur } \mathbb{C}\right).$$

  En choisissant $\mathbf{y} = \mathbf{e}_i$ (avec $i = 1, \dots, n$), on trouve $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle = x_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle$, donc

  $$x_i = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle}{\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle}.$$

  Retenez que dans une base orthogonale, on peut retrouver les coordonnées à partir des produits scalaires avec les éléments de la base.
- Si on suppose $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ <u>orthonormée</u>, alors on a en plus $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = 1$ pour tout i et donc

  $$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_j \qquad \left(= \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_j \text{ sur } \mathbb{C}\right).$$

  On a aussi $x_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle$ pour $i = 1, \dots, n$ et

  $$\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \qquad \text{(valable sur } \mathbb{R} \text{ comme sur } \mathbb{C}).$$

Moralité. On a envie de travailler avec une base orthogonale ou orthonormée.

3 Orthogonalisation : procédé de Gram-Schmidt

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel (c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension quelconque muni d'un produit scalaire). On note $\| \cdot \|$ la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

But : Transformer une famille libre $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ (typiquement une base) en une famille orthogonale.

Proposition 3.1. *Soit $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ une famille libre de E. Alors il existe une famille libre orthogonale $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ de E telle que*

$$\mathrm{Vect}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i) = \mathrm{Vect}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_i) \qquad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

Plus précisément, on a $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1$ et pour $k = 1, \dots, n-1$,

$$\mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{e}_{k+1} - \sum_{j=1}^k \frac{\langle \mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{f}_j \rangle}{\langle \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j \rangle} \mathbf{f}_j. \tag{3.1}$$

Quelques remarques.

- On peut demander à ce que la famille $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ soit orthonormée. Dans ce cas, il faut normaliser à chaque étape en posant

$$\mathbf{f}_{k+1} = \frac{\mathbf{g}_{k+1}}{\|\mathbf{g}_{k+1}\|}, \qquad \text{où } \mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{e}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle \mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{f}_j\rangle}{\langle \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j\rangle}\mathbf{f}_j.$$

  On peut aussi normaliser à la toute fin de l'algorithme en remplaçant chaque $\mathbf{f}_k$ obtenu par $\mathbf{f}_k/\|\mathbf{f}_k\|$.
- Evitez d'apprendre la formule (3.1) par coeur, mais retenez comment la retrouver rapidement ! (c'est-à-dire comprenez la démonstration).
- On retiendra en particulier que $\mathbf{f}_k$ est égal à $\mathbf{e}_k$ qu'on modifie en ajoutant une combinaison linéaire des précédents...

Démonstration. Pour $k = 1, \dots, n$ on écrit $A_k = \mathrm{Vect}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$. Notons que puisque $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ est libre, on a $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subsetneq A_n$.

On procède par récurrence sur k. Soit $P(k)$ la propriété "il existe une famille libre orthogonale $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$ telle que $\mathrm{Vect}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_i) = A_i$ pour $i = 1, \dots, k$".

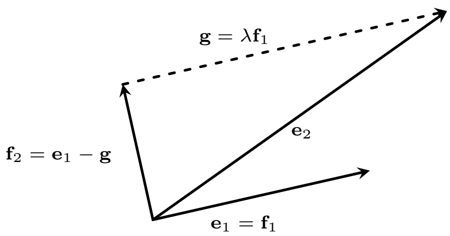
Initialisation. Pour $k = 1$, c'est vrai avec $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1$.

Hérédité. Supposons $P(k)$ vérifiée pour un k entre 1 et $n-1$. Montrons $P(k+1)$. Par hypothèse de récurrence, il existe $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$ libre (et orthogonale) et telle que $\mathrm{Vect}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_i) = A_i$ pour $i = 1, \dots, k$. On cherche f_{k+1} tel que

$$A_k + \mathrm{Vect}(\mathbf{e}_{k+1}) = A_{k+1} = \mathrm{Vect}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{k+1}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k) + \mathrm{Vect}(\mathbf{f}_{k+1}) = A_k + \mathrm{Vect}(\mathbf{f}_{k+1}).$$

Comme $A_k \subsetneq A_{k+1}$, nécessairement un tel $\mathbf{f}_{k+1}$ doit vérifier $\mathbf{f}_{k+1} \notin A_k = \mathrm{Vect}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$, et donc $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{k+1})$ sera automatiquement libre. Il ne reste donc qu'à construire $\mathbf{f}_{k+1}$.

Idée. On essaie de construire $\mathbf{f}_{k+1}$ à partir de $\mathbf{e}_{k+1}$ en le "redressant" pour le rendre orthogonal à A_k. Pour cela, on va écrire $\mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{e}_{k+1} - \mathbf{g}$ avec $\mathbf{g} \in A_k$. Le dessin ci-dessous illustre le cas $k = 1$.



Comme $\mathbf{e}_{k+1} \notin A_k$, un tel f_{k+1} n'appartient pas à A_k mais appartient à $A_k + \mathrm{Vect}(\mathbf{e}_{k+1}) = A_{k+1}$. Donc $A_k + \mathrm{Vect}(f_{k+1}) = A_{k+1}$.

Comme A_k est généré par les $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ aussi bien que par $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$, on peut écrire $\mathbf{g}$ comme combinaison linéaire des $\mathbf{e}_i$ ou des $\mathbf{f}_i$. On a vu dans la partie précédente qu'il est beaucoup plus agréable de travailler avec une famille orthogonale pour les formules, donc naturellement on va choisir d'écrire $\mathbf{g}$ à l'aide des $\mathbf{f}_i$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. On pose $\mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{e}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{f}_i$. Alors $\mathbf{f}_{k+1}$ est orthogonal à $\mathbf{f}_j$ pour $j = 1, \dots, k$ ssi $\langle \mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{f}_j\rangle = 0$, ce qui se réécrit

$$0 = \langle \mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{f}_j\rangle = \left\langle \mathbf{e}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \right\rangle = \langle \mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{f}_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underbrace{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j\rangle}_{= 0 \text{ si } i \neq j} = \langle \mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{f}_j\rangle - \lambda_j \langle \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j\rangle.$$

On trouve donc la condition $\mathbf{f}_{k+1} \perp \mathbf{f}_j$ ssi $\lambda_j = \langle \mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{f}_j \rangle / \langle \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j \rangle$ (remarquez que $\langle \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j \rangle \neq 0$ puisque $\mathbf{f}_j \neq 0$). D'où la formule (3.1). Par ce qui précède $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{k+1})$ est bien une famille libre qui engendre A_{k+1}, d'où $P(k+1)$. Ceci conclut notre récurrence. □

Corollaire 3.2. *Tout espace Euclidien admet une base orthogonale (et même orthonormée).*

Corollaire 3.3. *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et $\| \cdot \|_2$ la norme associée. Alors il existe un isomorphisme d'espace vectoriel $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ qui préserve le produit scalaire, c'est-à-dire tel que pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a $\langle \Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{y}) \rangle_c = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. De manière équivalente Φ préserve la norme, c'est-à-dire que $\|\Phi(\mathbf{x})\|_2 = \|\mathbf{x}\|$.*

Remarque. Cela signifie que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ s'identifie à $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.

Démonstration. Soit $(\mathbf{e}_, \ldots, \mathbf{e}_n)$ une base orthonormée de E (existe d'après le corollaire précédent). Soit $(\mathbf{f}_, \ldots, \mathbf{f}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit Φ par $\Phi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{f}_i$ pour $i =, \ldots, n$. C'est bien un isomorphisme (envoie une base sur une base). Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ et $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ (pour $i = 1, \ldots, n$) tels que $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{e}_i$. Notons que $\Phi(\mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\Phi(\mathbf{y}) = (y_1, \ldots, y_n)$. De plus, comme $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ est orthonormée, on a vu que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle \Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{y}) \rangle_c.$$

□

Corollaire 3.4. *Soit E un espace Euclidien et F un sous-espace de E. Alors $F^\perp$ est un supplémentaire de F, c'est-à-dire $E = F \oplus F^\perp$. En particulier,* $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

Démonstration. On pose $n = \dim E$ et $m = \dim F$. Soit $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$ une base de F qu'on complète en une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de E. On orthogonalise $\mathcal{B}$ par le procédé de Gram-Schmidt en une base orthogonale $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ de E vérifiant

$$\mathrm{Vect}(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m) = \mathrm{Vect}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m) = F.$$

Posons $G = \mathrm{Vect}(\mathbf{f}_{m+1}, \ldots, \mathbf{f}_n)$. Comme pour $j = m+1, \ldots, n$ le vecteur $\mathbf{f}_j$ est orthogonal à F, on a $G \subseteq F^\perp$. Par ailleurs, comme $F \cap F^\perp = \{0\}$, on a $\dim F + \dim F^\perp \leq \dim E$, donc $\dim F^\perp \leq n - m$. Or G a dimension $n - m$ et $G \subseteq F^\perp$. On en déduit que $G = F^\perp$ et $\dim F^\perp = n - m$. □

Exercice 3.5. En utilisant le résultat précédent, montrez que si E est un espace Euclidien (donc de dimension finie) et F, G sont deux sous-espaces de E, alors $(F^\perp)^\perp = F$, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Démonstration. D'après la Proposition 1.6, on a déjà l'inclusion $F \subseteq (F^\perp)^\perp$. Or, d'après le corollaire précédent, en posant $H = F^\perp$ on a

$$\dim (F^\perp)^\perp = \dim H^\perp = \dim E - \dim H = \dim E - \dim F^\perp = \dim E - (\dim E - \dim F) = \dim F,$$

d'où l'égalité.

De même, on a $F^\perp + G^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp$ et $F^\perp \cap G^\perp \subseteq (F+G)^\perp$. On déduit de la deuxième inclusion que

$$\dim (F^\perp \cap G^\perp) \leq \dim (F+G)^\perp.$$

Rappelons qu'on a aussi les formules $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G)$ et $\dim(F^\perp + G^\perp) = \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F^\perp \cap G^\perp)$. En partant de la deuxième avec ce qui précède, on obtient

$$\begin{aligned}
\dim(F^\perp + G^\perp) &= \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F^\perp \cap G^\perp) \\
&\geq \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F+G)^\perp \\
&\geq (\dim E - \dim F) + (\dim E - \dim G) - (\dim E - \dim(F+G)) \\
&\geq \dim E - (\dim F + \dim G - \dim(F+G)) \\
&\geq \dim E - \dim(F \cap G) \\
&\geq \dim(F \cap G)^\perp.
\end{aligned}$$

Comme $F^\perp + G^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp$, on en déduit l'égalité.

Finallement, en appliquant l'égalité précédente avec $F^\perp$ et $G^\perp$ à la place de F et G (et puisque $(F^\perp)^\perp = F$ et $(G^\perp)^\perp = G$, on a $F + G = (F^\perp \cap G^\perp)^\perp$. En appliquant l'orthogonal de chaque côté, cela livre $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$. $\square$

Exemple. (Orthogonalisation de Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel). Soient $\mathbf{e}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{e}_2 = (1,1,1)$ et $\mathbf{e}_3 = (-1,-1,0)$. Orthogonalisez la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ en suivant le procédé de Gram-Schmidt.

On commence par poser $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1$. Ensuite, on cherche ensuite $\mathbf{f}_2$ sous la forme $\mathbf{e}_2 - \lambda \mathbf{f}_1$ de sorte que $\langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1 \rangle = 0$. Cela donne la condition

$$0 = \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1 \rangle = \langle \mathbf{e}_2 - \lambda \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1 \rangle - \lambda \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle,$$

et donc

$$\lambda = \frac{\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1 \rangle}{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle} = \frac{1 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 1}{1 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1} = 1.$$

D'où $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{f}_1 = (0,1,0)$. On cherche enfin $\mathbf{f}_3$ sous la forme $\mathbf{e}_3 - \lambda \mathbf{f}_2 - \mu \mathbf{f}_1$ vérifiant $\langle \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_2 \rangle = \langle \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1 \rangle = 0$. Cela donne

$$\lambda = \frac{\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{f}_2 \rangle}{\langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle} = \frac{-1}{1} = -1 \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{f}_1 \rangle}{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle} = \frac{-1}{2},$$

d'où $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{f}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{f}_1 = (-1/2, 0, 1/2)$.

Avec un peu d'habitude, on peut écrire directement

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 - \frac{\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1 \rangle}{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle} \mathbf{f}_1 = \cdots \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3 - \frac{\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{f}_2 \rangle}{\langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle} \mathbf{f}_2 - \frac{\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{f}_1 \rangle}{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle} \mathbf{f}_1 = \cdots$$

Base normalisée. Pour avoir une base normalisée, il faut diviser chaque $\mathbf{f}_i$ par sa norme. On a par exemple $\|\mathbf{f}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle} = \sqrt{2}$, et donc on va remplacer $\mathbf{f}_1$ par $\mathbf{f}_1/\|\mathbf{f}_1\| = \mathbf{f}_1/\sqrt{2} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$. Pour $\mathbf{f}_2$ on trouve $\|\mathbf{f}_2\| = 1$ (déjà normalisé). Enfin, on a $\|\mathbf{f}_3\| = \sqrt{1/4 + 1/4} = 1/\sqrt{2}$, et on remplace $\mathbf{f}_3$ par $\mathbf{f}_3/\|\mathbf{f}_3\| = \sqrt{2} \times \mathbf{f}_3 = (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$. Finalement, la base normalisée obtenue est

$$(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), \quad (0,1,0), \quad (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2).$$