

# Algèbre 4 - Cours 1

## Formes bilinéaires

Printemps 2023

### Table des matières

0	Avertissement et remarques hors-programme (HP)	1
1	Formes bilinéaires	2
2	Représentation matricielle d'une forme bilinéaire	3
3	Changement de bases	5
4	Formes bilinéaires symétriques	6
5	Formes quadratiques	7
6	Produit scalaire et premiers exemples	8
7	Inégalité de Cauchy-Schwarz et normes euclidiennes	9
8	Cas complexe - espaces hermitiens (HP)	11

### 0 Avertissement et remarques hors-programme (HP)

**Rappel.** Soit  $K$  un corps (typiquement  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) et  $E, F$  deux  $K$ -espaces vectoriels. On dit que  $f : E \rightarrow F$  est une *application linéaire* si pour tous  $\lambda, \mu \in K$  et  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$  on a :

$$f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}).$$

On dit aussi que  $f$  est un *morphisme d'espaces vectoriels*.

Si  $F = E$ , on dit que  $f$  est un *endomorphisme*. Si  $F = K$ , on dit que  $f$  est une *forme linéaire*.

Soit  $n, m$  deux entiers  $> 0$  et  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$  une matrice  $n \times m$  à coefficients dans  $K$ . La transposée de  $A$  est la matrice

$${}^tA = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

de taille  $m \times n$  définie par  $b_{ij} = a_{ji}$  pour tout  $i, j$  avec  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n$ . Autrement dit, la  $i$ -ème ligne de  ${}^tA$  correspond à la  $i$ -ème colonne de  $A$ . La transposée transforme une matrice colonne en une matrice ligne, et vice versa. Une matrice carrée  $A$  est dite *symétrique* si  $A = {}^tA$  et *antisymétrique* si  ${}^tA = -A$ .

**Remarque hors-programme.** Seul le cas  $K = \mathbb{R}$  est au programme. Cependant, tous les résultats des Sections 1 à 3 restent valables en remplaçant le corps  $\mathbb{R}$  par un corps quelconque  $K$

(le cas  $K = \mathbb{C}$  est un exemple classique important). C'est également le cas pour les sections 4 et 5 en supposant que  $K$  est de caractéristique  $\neq 2$  (puisqu'on a des formules où on divise par 2). Dans le cadre des examens, on se limitera à  $K = \mathbb{R}$ .

## 1 Formes bilinéaires

Dans cette partie  $V$  désigne un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Définition 1.1.** On dit que  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  est une *forme bilinéaire* (sur  $V$ ) si elle est linéaire en chacune des variables, autrement dit :

- Pour tout  $\mathbf{x} \in V$  fixé, la fonction  $\varphi(\mathbf{x}, \cdot) : \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{y} \mapsto \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases}$  est linéaire, c'est-à-dire que pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et pour tous  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$ , on a

$$\varphi(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}_1 + \mu \mathbf{y}_2) = \lambda \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \mu \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2).$$

- Pour tout  $\mathbf{y} \in V$  fixé, la fonction  $\varphi(\cdot, \mathbf{y}) : \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases}$  est linéaire, c'est-à-dire que pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et pour tous  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ , on a

$$\varphi(\lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \lambda \varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \mu \varphi(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}).$$

On note  $\text{BL}(V)$  l'espace des formes bilinéaires sur  $V$ .

**Définition 1.2.** Soit  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire. On dit que  $\varphi$  est *symétrique* si pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  on a  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ . On dit que  $\varphi$  est *antisymétrique* si pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  on a  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .

*Remarque.* L'ensemble des formes bilinéaires (resp. bilinéaires symétriques, resp. bilinéaires antisymétriques) sur  $V$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Autrement dit, si  $\alpha, \beta$  sont deux formes bilinéaires sur  $V$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $\alpha + \beta$  et  $\lambda \alpha$  sont des formes bilinéaires sur  $V$ .

*Démonstration.* (supplément de cours) Soient  $\alpha, \beta \in \text{BL}(V)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Comme mentionné ci-dessus, pour montrer que  $\text{BL}(V)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, il suffit de montrer que  $\alpha + \beta \in \text{BL}(V)$  et  $\lambda \alpha \in \text{BL}(V)$ .

Soit  $\mathbf{x} \in V$ . Comme  $\alpha, \beta \in \text{BL}(V)$ , les fonctions  $\alpha(\mathbf{x}, \cdot), \beta(\mathbf{x}, \cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$  sont linéaires. Donc  $\alpha(\mathbf{x}, \cdot) + \beta(\mathbf{x}, \cdot)$  et  $\lambda \alpha(\mathbf{x}, \cdot)$  sont également linéaires (de manière plus conceptuelle, l'espace des formes linéaires  $V \rightarrow \mathbb{R}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel).

De même, si  $\mathbf{y} \in V$  est fixé, les fonctions  $\alpha(\cdot, \mathbf{y}) + \beta(\cdot, \mathbf{y})$  et  $\lambda \alpha(\cdot, \mathbf{y})$  sont linéaires (puisque  $\alpha(\cdot, \mathbf{y})$  et  $\beta(\cdot, \mathbf{y})$  le sont). On en déduit que  $\alpha + \beta$  et  $\lambda \alpha$  sont bilinéaires. Donc  $\text{BL}(V)$  est bien un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Supposons de plus que  $\alpha$  et  $\beta$  sont symétrique et posons  $\varphi = \alpha + \beta$ . Pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ , on a

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= \alpha(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{car } \alpha \text{ et } \beta \text{ symétriques}) \\ &= \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned}$$

Donc  $\varphi = \alpha + \beta$  est aussi symétrique. De même  $\lambda \alpha(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \lambda \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , donc  $\lambda \alpha$  est symétrique. Cela montre que les formes bilinéaires symétriques forme un sous-espace vectoriel de  $\text{BL}(V)$ . La preuve dans le cas antisymétrique est la même.

□

**Exemple(s)**

- $V = \mathbb{R}^n$ . Le produit scalaire canonique  $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$  défini pour tous  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$  par

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

est une forme bilinéaire symétrique.

- $V = \mathbb{C}^n$  et  $\varphi$  définie pour tous  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  dans  $\mathbb{R}^n$  par

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

C'est une forme bilinéaire sur le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  (attention, ce n'est PAS un produit scalaire sur  $\mathbb{C}^n$ ).

- $V = \mathbb{R}^2$ . La fonction  $\varphi$  définie pour tous  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$  par

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 5x_1 y_2 - 3x_2 y_1$$

est une forme bilinéaire (non symétrique).

- $V = \mathbb{R}^2$  et  $\varphi = \det$  défini pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  par

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

(forme bilinéaire antisymétrique).

- Soient  $a < b$  deux réels et soit  $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$  espace vectoriel des fonctions réelles continues sur  $[a, b]$  (dimension infinie). L'application  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tous  $f, g \in V$  par

$$\varphi(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

est une forme bilinéaire symétrique.

- Soit  $V = \{\mathbf{u} = (u_n)_{n \geq 0} \mid \sum_{i=0}^{\infty} u_n^2 < \infty\}$  (c'est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension infinie). Alors  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $\mathbf{u} = (u_n)_{n \geq 0}$  et  $\mathbf{v} = (v_n)_{n \geq 0}$  par

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i v_i$$

est une forme bilinéaire symétrique (on verra que c'est même un produit scalaire).

*Remarque.* En utilisant l'inégalité  $|ab| \leq (a^2 + b^2)/2$  pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ , on peut montrer que la série définissant  $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  est absolument convergente. En effet

$$\sum_{i=0}^{\infty} |u_i v_i| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2}(u_i^2 + v_i^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} v_i^2 < \infty \quad (\text{car } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V).$$

## 2 Représentation matricielle d'une forme bilinéaire

Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  une base de  $V$  et  $\varphi$  une forme bilinéaire sur  $V$ .

**Remarque.** Soient  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ . On écrit  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$  et  $\mathbf{y} = y_1 \mathbf{e}_1 + \dots + y_n \mathbf{e}_n$  avec  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$  pour tout  $i$ . Alors pour calculer  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  il suffit de connaître seulement les  $\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ . En effet, par bilinéarité on a :

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n, \mathbf{y}) = x_1 \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) + \dots + x_n \varphi(\mathbf{e}_n, \mathbf{y}).$$

Par ailleurs, pour  $i = 1, \dots, n$ , on a

$$\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{e}_i, y_1 \mathbf{e}_1 + \dots + y_n \mathbf{e}_n) = y_1 \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1) + \dots + y_n \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n).$$

Finalement, en injectant dans la première égalité, on trouve

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= x_1 y_1 \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + \dots + x_1 y_n \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ &\quad + x_2 y_1 \varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + \dots + x_2 y_n \varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + x_n y_1 \varphi(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) + \dots + x_n y_n \varphi(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n). \end{aligned}$$

Autrement dit, les  $n^2$  valeurs  $\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$  permettent de caractériser entièrement  $\varphi$ .

*Remarque.* C'est similaire au fait qu'une application linéaire sur  $V$  est entièrement caractérisée par les valeurs qu'elle prend sur une base de  $V$ .

**Définition 2.1.** La matrice  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice  $n \times n$  dont le coefficient d'indice  $(i, j)$  ( $i$ -ème ligne et  $j$ -ème colonne, avec  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ) est  $\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ . Autrement dit

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \dots & \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & \dots & \varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \dots & \varphi(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix}.$$

Les calculs précédents et la définition du produit matriciel impliquent le résultat suivant.

**Proposition 2.2.** En notant  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  et  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ , on a la formule

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t(X)AY.$$

**Remarque importante.** Attention ! La matrice  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  représentant  $\varphi$  dépend du choix de la base  $\mathcal{B}$  ! Une forme bilinéaire donnée a donc plusieurs représentations matricielles possibles (suivant le choix de la base). Quand on veut faire des calculs explicites avec des coordonnées, il est nécessaire de représenter  $\varphi$  dans une base.

**Exemple(s).**  $V = \mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{B} =$  base canonique (c'est-à-dire  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ). Etant donné

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  on écrit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ .

- On considère le produit scalaire canonique  $\varphi$  défini par  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ . Alors  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . En effet,  $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1$  et  $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0$ , d'où la première ligne de  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . De même  $\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 0$  et  $\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1$ , d'où la deuxième ligne de  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ .
- On considère le déterminant  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ . Après calcul, on trouve  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .
- Soit  $\varphi$  la forme bilinéaire définie par  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 + 3x_2 y_2$ . Alors  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  (on calcule les  $\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ ). On vérifie qu'on a bien

$${}^t X M_{\mathcal{B}}(\varphi) Y = (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 + 3x_2 y_2 = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

### 3 Changement de bases

Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension finie  $n$ . On considère deux bases  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  et  $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  de  $V$ . Soit  $\mathbf{x} \in V$  dont les coordonnées sont  $X = (x_1, \dots, x_n)$  dans la base  $\mathcal{B}$ , et  $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

**Rappels sur les changements de bases.** But : Trouver une relation entre  $X$  et  $X'$ .

**Définition 3.1.** La matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ , parfois notée  $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  ou  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ , est la matrice inversible  $P$  dont la  $j$ -ème colonne correspond au vecteur  $e'_j$  écrit dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Proposition 3.2.** Soient  $P$ ,  $X$  et  $X'$  comme ci-dessus. On a la relation

$$X = PX'.$$

Soit  $f$  un endomorphisme de  $V$ , et  $M$  (resp.  $M'$ ) sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$  (resp.  $\mathcal{B}'$ ). Alors

$$M' = P^{-1}MP.$$

On considère maintenant une forme bilinéaire  $\varphi$  sur  $V$ . Le but est maintenant de trouver une relation entre la représentation matricielle de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$  et sa représentation dans la base  $\mathcal{B}'$ .

**Proposition 3.3.** Soient  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  et  $A' = M_{\mathcal{B}'}(\varphi)$  les représentations de  $\varphi$  dans  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  respectivement. Notons  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ . Alors

$$A' = {}^tPAP.$$

*Démonstration.* Soient  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  de coordonnées  $X$  et  $Y$  (resp.  $X'$  et  $Y'$ ) dans la base  $\mathcal{B}$  (resp.  $\mathcal{B}'$ ). D'après la proposition 3.2, on a  $X = PX'$  et  $Y = PY'$ . Par ailleurs, par définition de la représentation matricielle de  $\varphi$ , on a

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t(X')A'Y' = {}^tXAY = {}^tPX'A(PY') = {}^t(X')({}^tPAP)Y'.$$

(rappelons que  ${}^tMN = {}^tN{}^tM$  pour tout  $M, N$ ). Donc pour tout  $X', Y'$ , on a

$${}^t(X')A'Y' = {}^t(X')({}^tPAP)Y'.$$

En choisissant  $\mathbf{x} = \mathbf{e}'_i$  et  $\mathbf{y} = \mathbf{e}'_j$  (de sorte que  $X'$  est le vecteur colonne avec que des zéros, sauf un 1 à la  $i$ -ème place, idem pour  $Y'$  avec un 1 à la  $j$ -ème place), on en déduit que le coefficient d'indice  $(i, j)$  de  $A'$  est égal au coefficient d'indice  $(i, j)$  de  ${}^tPAP$  pour  $i, j = 1, \dots, n$ . Autrement dit  $A' = {}^tPAP$ .  $\square$

**Exemple(s).** Soit  $V = \mathbb{R}^2$  et  $\varphi$  définie par  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + 3x_2y_2$  (cf. exemple précédent). On note  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  la base canonique. On a vu que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant  $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$  avec  $\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . On cherche à trouver  $A' = M_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ .

**Première méthode.** On utilise la définition et on calcule les  $\varphi(e'_i, e'_j)$ . On trouve  $\varphi(e'_1, e'_1) = 0 \times (-1) + 3 \times (-1) \times (-1) = 3$ ,  $\varphi(e'_1, e'_2) = 0$ ,  $\varphi(e'_2, e'_1) = -1$  et  $\varphi(e'_2, e'_2) = 0$ . D'où

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Deuxième méthode.** On va utiliser la formule de changement de bases.

- On détermine d'abord  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  (on écrit  $\mathcal{B}'$  dans  $\mathcal{B}$ ). On a

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- On a alors  $A' = {}^tPAP$ . On trouve

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 4 Formes bilinéaires symétriques

(HP : Les résultats de cette partie sont vrais en remplaçant  $\mathbb{R}$  par un corps quelconque de caractéristique  $\neq 2$ , par exemple  $K = \mathbb{C}$ ). Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie  $n$ . On considère une base  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  de  $V$  et  $\varphi$  une forme bilinéaire sur  $V$ . Rappelons que  $\varphi$  est symétrique (resp. antisymétrique) si  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  (resp.  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ) pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ .

**Définition 4.1.** On note  $\text{BLS}(V)$  l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur  $V$ .

**Exemple(s)**(de formes bilin. symétriques). Avec  $V = \mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{B}$  sa base canonique.

- Pour  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$ , on a  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- Pour  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$ , on trouve  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

On remarque que ces matrices sont elles-mêmes symétriques (c'est-à-dire vérifient  ${}^tA = A$ ).

**Proposition 4.2.** Soit  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  la matrice de  $\varphi$  dans  $\mathcal{B}$ . Alors  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si  $A$  est une matrice symétrique (resp. antisymétrique).

*Démonstration.* Supposons  $\varphi$  symétrique (resp. antisymétrique). Alors pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  on a  $\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \varphi(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$  (resp.  $\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = -\varphi(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$ ). Par définition de  $A$ , son coefficient d'indice  $(i, j)$  est égal (resp. est l'opposé) du coefficient d'indice  $(j, i)$ . Donc  $A$  est symétrique (resp. antisymétrique).

Réciproquement, supposons  $A$  symétrique, de sorte que  ${}^tA$  est égale à  $A$ . Soient  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  de coordonnées  $X$  et  $Y$  respectivement (dans  $\mathcal{B}$ ). Comme  ${}^tXAY$  est une matrice de taille  $1 \times 1$  elle est symétrique, donc égale à sa transposée ! D'où

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^tXAY = {}^t({}^tXAY) = {}^tY{}^tAX = {}^tYAX = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

(car  ${}^t({}^tX) = X$  et  ${}^tA = A$ ). Donc  $\varphi$  est bien symétrique.

De même, si on suppose  $A$  antisymétrique, c'est-à-dire que  ${}^tA = -A$ , on trouve  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -{}^tYAX = -\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ , donc  $\varphi$  est bien antisymétrique.  $\square$

*Remarque.* Si  $\varphi$  est antisymétrique, alors  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  pour tout  $\mathbf{x}$ , c'est-à-dire  $2\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ . On en déduit que  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$  pour tout  $\mathbf{x} \in V$  (HP : attention, sur un corps quelconque il faut que  $2 \neq 0$  pour pouvoir appliquer ce raisonnement). Cela implique que les coefficients diagonaux de  $A$  sont tous nuls.

**Proposition 4.3.** Toute forme bilinéaire  $\varphi$  sur  $V$  se décompose comme somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire antisymétrique :

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \underbrace{\frac{\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{2}}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\frac{\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{2}}_{\text{antisymétrique}} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V).$$

**Pour aller plus loin.**

L'application  $F : \begin{cases} \{\text{formes bilin. sur } V\} & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto M_{\mathcal{B}}(\varphi) \end{cases}$  induit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre

- le  $\mathbb{R}$ -ev des formes bilinéaires sur  $V$  et l'espace  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  des matrices carrées de taille  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$  ;
- le  $\mathbb{R}$ -ev des formes bilinéaires symétriques sur  $V$ , qu'on a noté  $\text{BLS}(V)$ , et l'espace  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  des matrices symétriques  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$  ;
- le  $\mathbb{R}$ -ev des formes bilinéaires antisymétriques sur  $V$  et l'espace  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  des matrices antisymétriques  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$  ;

*Démonstration.* (Esquisse) :

- Montrer que  $F$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire (donc que c'est bien un morphisme de  $\mathbb{R}$ -ev). C'est à peu près immédiat en utilisant le fait que le coefficient  $(i, j)$  de  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ .
- Montrer que  $F$  est injective, c'est-à-dire que si  $M_{\mathcal{B}}(\varphi_1) = M_{\mathcal{B}}(\varphi_2)$  alors  $\varphi_1 = \varphi_2$  (utiliser la Proposition 2.2).
- Montrer enfin que  $F : \{\text{formes bilinéaires}\} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (resp.  $F : \text{BLS}(V) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , resp.  $F : \{\text{formes bilinéaires antisymétriques}\} \rightarrow \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ) est surjective. Pour cela, il suffit de voir que toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  correspond à une forme bilinéaire (il suffit de définir  $\varphi$  via la formule de la Proposition 2.2!).

□

## 5 Formes quadratiques

(HP : Les résultats de cette partie sont vrais en remplaçant  $\mathbb{R}$  par un corps quelconque de caractéristique  $\neq 2$ , par exemple  $K = \mathbb{C}$ ). Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie  $n$ .

**Définition 5.1.** Soit  $\varphi \in \text{BLS}(E)$ , l'espace des formes bilinéaires symétriques sur  $E$ . On appelle *forme quadratique associée à  $\varphi$*  l'application  $q_{\varphi} = q : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $q(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  pour tout  $\mathbf{x} \in E$ . La fonction  $\varphi$  est appelée la *forme polaire* de  $q$ . On note  $\mathcal{Q}(E)$  l'ensemble des formes quadratiques sur  $E$ .

**Remarque.** Attention,  $q$  n'est plus une application linéaire !

**Remarque HP (pour la culture).** L'espace  $\mathcal{Q}(E)$  est isomorphe à l'espace des polynômes homogènes de degré 2 à  $n$  variables et à coefficients réels.

**Exemple(s).**  $E = \mathbb{R}^2$  et  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2$  où  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$  (forme bilin. symétrique). On a alors

$$q_{\varphi}(\mathbf{x}) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2.$$

**Définition 5.2.** Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $q \in \mathcal{Q}(E)$  de forme polaire  $\varphi \in \text{BLS}(E)$ . On note

$$M_{\mathcal{B}}(q) := M_{\mathcal{B}}(\varphi).$$

C'est une matrice symétrique.

Le prochain résultat montre que la forme quadratique  $q_{\varphi}$  caractérise entièrement  $\varphi$ , autrement dit on peut reconstituer la forme bilinéaire symétrique  $\varphi$  à partir de  $q_{\varphi}$  seulement.

**Proposition 5.3.** Soit  $\varphi \in \text{BLS}(E)$ . Pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ , on a

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \left( q_{\varphi}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q_{\varphi}(\mathbf{x}) - q_{\varphi}(\mathbf{y}) \right) = \frac{1}{4} \left( q_{\varphi}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q_{\varphi}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right).$$

*Démonstration.* Par bilinéarité + symétrie, on trouve

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{y}) && \text{(linéaire à droite)} \\ &= \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{y}) && \text{(linéaire à gauche)} \\ &= q_\varphi(\mathbf{x}) + q_\varphi(\mathbf{y}) + 2\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) && \text{(symétrie : } \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{)}. \end{aligned}$$

La première égalité de la proposition en découle facilement. De même, un calcul similaire donne

$$q(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = q_\varphi(\mathbf{x}) + q_\varphi(\mathbf{y}) - 2\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

et en combinant avec les calculs précédent on trouve  $q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 4\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .  $\square$

**Remarque HP.** Sur un corps quelconque  $K$  on a besoin ici de supposer que la caractéristique de  $K$  est  $\neq 2$  car on divise par 2.

**Pour aller plus loin.**

**Proposition 5.4.** L'application  $\Phi : \begin{cases} \text{BLS}(E) \rightarrow \mathcal{Q}(E) \\ \varphi \mapsto q_\varphi \end{cases}$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -ev.

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $\mathcal{Q}(E)$  est un  $\mathbb{R}$ -ev. Soient  $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}(E)$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . On note  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  respectivement les formes polaires de  $q_1$  et  $q_2$ . Soit  $\mathbf{x} \in E$ . Alors

$$\lambda q_1(\mathbf{x}) + \mu q_2(\mathbf{x}) = \lambda \varphi_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mu \varphi_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Or  $\varphi := \lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2 \in \text{BLS}(E)$  (car  $\text{BLS}(E)$  est un  $\mathbb{R}$ -ev), et la formule précédente montre que  $q := \lambda q_1 + \mu q_2$  est la forme quadratique associée à  $\varphi$ . Donc  $q \in \mathcal{Q}(E)$ .

L'application  $\Phi$  est clairement  $\mathbb{R}$ -linéaire (autrement dit  $q_{\lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2} = \lambda q_{\varphi_1} + \mu q_{\varphi_2}$  pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et tous  $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{BLS}(E)$ ).

La fonction  $\Phi$  est surjective par définition de  $\mathcal{Q}(E)$ .

Il reste à montrer que  $\Phi$  est injective, c'est-à-dire que si  $q_{\varphi_1} = q_{\varphi_2}$ , alors  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Cela découle de la Proposition 5.3 (qui implique que  $\varphi$  est entièrement déterminée par  $q$ ).  $\square$

## 6 Produit scalaire et premiers exemples

Dans cette partie  $E$  désigne un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (de dimension finie ou infinie). HP : on a une théorie similaire sur le corps  $K = \mathbb{C}$  mais les choses sont plus compliquées (voir Partie 8).

**Définition 6.1.** On appelle produit scalaire sur  $E$  toute application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

- Pour tout  $\mathbf{x} \in E$ ,  $\langle \mathbf{x}, \cdot \rangle$  est linéaire ;
- Pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ , on a  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$  (symétrique)
- Pour tout  $\mathbf{x} \in E \setminus \{0\}$  on a  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$  (on dit que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est *définie positive*).

*Remarque.* Les deux premières conditions sont équivalentes à dire que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une forme bilinéaire symétrique (en effet, si  $\varphi$  est linéaire à droite et symétrique, alors elle est aussi linéaire à gauche).

**Définition 6.2.** Un espace *préhilbertien réel* est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire. Si  $E$  est de dimension finie, on dit que c'est un *espace euclidien*.

*Remarque.* Disposer d'un produit scalaire sur un espace vectoriel  $E$  donne une structure géométrique supplémentaire. On verra entre autres qu'on peut associer une norme au produit scalaire, ce qui fait de  $E$  un espace vectoriel normé.



**Notations.** Le produit scalaire entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  est parfois noté  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$ ,  $(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ , etc.

**Exemple(s)**

- Sur  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ .
  - Produit scalaire usuel / canonique défini par  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$
  - Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$ . Produit scalaire défini par  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \alpha_1x_1y_1 + \dots + \alpha_nx_ny_n$  (la matrice associée est la matrice de diagonale  $\text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ).
- Sur  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  (fonctions réelles continues sur  $[0, 1]$ ).
  - $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$ .
  - $(f, g) \mapsto \int_0^1 w(t)f(t)g(t)dt$ , où  $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  est continue par morceaux et ne s'annule qu'en un nombre fini de points.
- Sur  $E = \ell^2(\mathbb{N}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \geq 0} u_n^2 < \infty\}$ .
  - $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \sum_{n \geq 0} u_nv_n$ .
- Sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$  (polynômes réels de degré  $\leq n$ ).
  - $(P, Q) \mapsto \int_a^b P(t)Q(t)dt$  (pour  $a < b$  fixés). (Indication :  $P \in E$  a au plus  $n$  racines).
  - $(P, Q) \mapsto \sum_0^n P(k)Q(k)$ .
- sur  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
  - $(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tAB)$  (Indication : si  $A = (a_{ij})_{i,j}$  et  $B = (b_{ij})_{i,j}$  on a  $\text{Tr}({}^tAB) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}b_{ij}$ ).

## 7 Inégalité de Cauchy-Schwarz et normes euclidiennes

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie. HP : les résultats de cette partie restent vrais sur  $K = \mathbb{C}$  avec un produit scalaire complexe, mais les choses sont plus compliquées (voir Partie 8).

**Proposition 7.1.** (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*) Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire sur  $E$  (c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique définie positive :  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$  pour tout  $\mathbf{x} \in E$  avec égalité si et seulement si  $\mathbf{x} = 0$ ). Alors

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \quad (7.1)$$

avec égalité si et seulement si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont liés (c'est-à-dire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$  ou  $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$ ).

*Remarque.* L'inégalité (8.1) est encore vraie si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est seulement une forme bilinéaire symétrique positive (c'est-à-dire que  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$  pour tout  $\mathbf{x} \in E$  mais qu'on pourrait avoir  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$  pour des  $\mathbf{x} \in E$  non nuls).

*Démonstration.* Si  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 0$  alors  $\mathbf{y} = 0$  (puisque le produit scalaire est défini positif) et donc les deux côtés de (8.1) sont nuls. On a alors le résultat (on a aussi que  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont liés puisque  $\mathbf{y} = 0 \times \mathbf{x}$ ). On suppose désormais que  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \neq 0$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on pose  $P(t) := \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle$ . Comme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est supposée positive on a  $P(t) \geq 0$  pour tout  $t$ . En développant par bilinéarité (+symétrie), on trouve

$$P(t) = \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \geq 0.$$

En posant  $a = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ ,  $b = 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  et  $c = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ . Le polynôme  $at^2 + bt + c$  est de degré 2 (car par hypothèse  $a$  est non nul) et est toujours  $\geq 0$ , ce qui n'est possible que si son discriminant est strictement négatif (pas de racine) ou nul (une unique racine). On trouve la condition

$$0 \geq b^2 - 4ac = 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle.$$

D'où (8.1). Supposons maintenant que (8.1) est une égalité. Alors d'après ce qui précède, le discriminant de  $P$  est égal à 0, et donc  $P$  possède une (unique) racine réelle  $\lambda$ . Pour  $t = \lambda$ , on trouve

$$0 = P(\lambda) = \langle \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \rangle.$$

Comme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est définie positive, on en déduit que  $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} = 0$ , donc  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont bien liés.  $\square$

**Exemple(s).**

- Sur  $E = \mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire usuel. Soient  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ . Alors

$$(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

avec égalité si et seulement si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont liés.

- Sur  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . Alors pour toutes  $f, g \in E$ , on a

$$\left( \int_0^1 f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^2 dt \int_0^1 g(t)^2 dt.$$

**Définition 7.2.** Une norme sur  $E$  est une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  vérifiant :

- Pour tout  $\mathbf{x} \in E$  on a  $N(\mathbf{x}) = 0$  si et seulement si  $\mathbf{x} = 0$ ;
- Pour tout  $\mathbf{x} \in E$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  on a  $N(\lambda \mathbf{x}) = |\lambda|N(\mathbf{x})$  (homogénéité);
- Pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ , on a  $N(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq N(\mathbf{x}) + N(\mathbf{y})$  (inégalité triangulaire).

**Proposition 7.3.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace Euclidien (c'est-à-dire que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ ). Alors l'application  $\|\cdot\| : \mathbf{x} \mapsto \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$  définit une norme sur  $E$  appelée norme euclidienne.

*Démonstration.* Puisque le produit scalaire est défini positif, on a bien  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$  pour tout  $\mathbf{x} \in E$  avec égalité si et seulement si  $\mathbf{x} = 0$ . De plus, par bilinéarité, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a  $\langle \lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle = \lambda^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ , d'où  $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$ . Il reste donc à montrer l'inégalité triangulaire. Soit  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ . Puisque  $\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle}$  pour tout  $\mathbf{z} \in E$ , on a

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (en passant à la racine carrée) on a

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|,$$

d'où

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

On conclut en passant à la racine carrée.  $\square$

**Attention.** Toutes les normes ne sont pas euclidiennes! Par exemple, sur  $\mathbb{R}^n$ , les formules

- $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$  (pour  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ )
- $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ ,

définissent des normes (exercices) qui ne sont pas euclidiennes.

**Remarque importante.** De même qu'une forme quadratique caractérise entièrement la forme bilinéaire associée, la norme euclidienne (qui est la racine carrée de la forme quadratique associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) caractérise entièrement le produit scalaire dont elle provient grâce aux formules :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2}{2} = \frac{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4}$$

(valables pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ ).

## 8 Cas complexe - espaces hermitiens (HP)

Soit  $V$  un  $\mathbb{C}$  espace vectoriel (de dimension quelconque). Le but est d'avoir une théorie similaire à celle de la Partie 6 mais en travaillant sur  $\mathbb{C}$  plutôt que  $\mathbb{R}$ . Les résultats de cette partie sont hors-programme mais intéressants à savoir pour la culture (notamment si vous faites de la physique car on s'en sert pour la transformée de Fourier).

**Définition 8.1.** On appelle produit scalaire sur  $V$  toute application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

- Pour tout  $\mathbf{x} \in V$ ,  $\langle \mathbf{x}, \cdot \rangle$  est linéaire ;
- Pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ , on a  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$
- Pour tout  $\mathbf{x} \in V \setminus \{0\}$  on a  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$  (on dit que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est *défini positive*).

Une application vérifiant les deux premières conditions ci-dessus est dite *sesquilinéaire*. Un produit scalaire complexe est donc une application sesquilinéaire plutôt que bilinéaire (insistons :  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  n'est PAS bilinéaire). En particulier, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a  $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ , c'est la principale différence avec le cas réel.

*Remarque.* On a besoin d'introduire la conjugaison complexe pour avoir la bonne notion de "défini positif". En effet, si on suppose  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bilinéaire dans le cas complexe (à la place de sesquilinéaire comme dans la définition ci-dessus), alors

$$\langle i\mathbf{x}, i\mathbf{x} \rangle = i^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle.$$

Donc si on suppose  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$  alors on a  $\langle \mathbf{x}', \mathbf{x}' \rangle < 0$  en posant  $\mathbf{x}' = i\mathbf{x}$ , ce qui contredirait la propriété "défini positif" (que l'on souhaite avoir pour pouvoir définir une norme par exemple).

**Définition 8.2.** Un espace *préhilbertien complexe* est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  muni d'un produit scalaire. Si  $V$  est de dimension finie, on dit que c'est un *espace hermitien*.

**Exemple(s).**

- Sur  $V = \mathbb{C}^n$ , on définit pour tous  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$  le produit scalaire

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n.$$

- Sur  $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ , on définit pour tous  $f, g \in V$  le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)} g(t) dt.$$

- Sur  $V = \mathbb{C}[X]_n$ , l'espace des polynômes à coefficients complexes de degré au plus  $n$ , on définit pour tous  $P, Q \in V$

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^n \overline{P(i)} Q(i).$$

**Définition 8.3.** Soit  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien complexe. On associe à  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  l'application  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie pour tout  $\mathbf{x} \in V$  par  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ . C'est une *norme* (sur un  $\mathbb{C}$ -ev), c'est-à-dire qu'on a pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  et tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  :

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $\mathbf{x} = 0$  ;
- $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$  ;
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ .

Pour résumer, soit  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien (réel ou complexe) sur  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

	$K = \mathbb{R}$	$K = \mathbb{C}$
	préhilbertien réel	préhilbertien complexe
	espace euclien	espace hermitien
(Si $\dim V$ finie)		
$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$	$\ \mathbf{x} + \mathbf{y}\ ^2 = \ \mathbf{x}\ ^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \ \mathbf{y}\ ^2$	$\ \mathbf{x} + \mathbf{y}\ ^2 = \ \mathbf{x}\ ^2 + 2\operatorname{Re}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) + \ \mathbf{y}\ ^2$
$\alpha \in K$	$\ \alpha \mathbf{x}\  =  \alpha  \ \mathbf{x}\ $	$\ \alpha \mathbf{x}\  =  \alpha  \ \mathbf{x}\ $
	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{4}(\ \mathbf{x} + \mathbf{y}\ ^2 - \ \mathbf{x} - \mathbf{y}\ ^2)$	$\operatorname{Re}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) = \frac{1}{4}(\ \mathbf{x} + \mathbf{y}\ ^2 - \ \mathbf{x} - \mathbf{y}\ ^2)$
		$\operatorname{Im}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) = \frac{1}{4}(\ \mathbf{x} + i\mathbf{y}\ ^2 - \ \mathbf{x} - i\mathbf{y}\ ^2)$

Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est encore vraie sur  $\mathbb{C}$  (bien que la démonstration soit un peu plus compliquée).

**Proposition 8.4.** (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*) Soit  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace hermitien (c'est-à-dire que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une forme sesquilinéaire définie positive). Alors

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \quad (8.1)$$

avec égalité si et seulement si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont liés (c'est-à-dire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$  ou  $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$ ).

**Remarque.** N'oubliez pas les valeurs absolues dans (8.1) quand vous travaillez en complexe! (car a priori  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \in \mathbb{C}$  n'est pas réel, donc ça n'aurait pas de sens de dire qu'un nombre complexe est "plus petit" qu'un réel).

*Démonstration.* Si  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 0$  alors  $\mathbf{y} = 0$  (puisque le produit scalaire est défini positif) et donc les deux côtés de (8.1) sont nuls. On a alors le résultat (on a aussi que  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont liés puisque  $\mathbf{y} = 0 \times \mathbf{x}$ ). On suppose désormais que  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \neq 0$ . Pour tout  $t \in \mathbb{C}$  on pose  $P(t) := \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle$ . Comme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est supposée positive on a  $P(t) \in \mathbb{R}^+$  pour tout  $t$ . En développant par sesquilinearité, on trouve

$$\begin{aligned} P(t) &= \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + t\langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \bar{t}\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t\bar{t}\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle. \end{aligned}$$

Notons que par propriété du produit scalaire (complexe) on a  $\bar{t}\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \bar{t} \times \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} = \overline{t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$ , donc finalement

$$P(t) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\operatorname{Re}(t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) + |t|^2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle. \quad (8.2)$$

Comme on a  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{C}$ , il existe  $\rho \in \mathbb{R}^+$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \rho e^{i\theta}$ . On choisit alors  $t$  de la forme  $t = X e^{-i\theta}$  avec  $X \in \mathbb{R}$ . En injectant dans (8.2), on obtient

$$Q(X) := P(X e^{-i\theta}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\operatorname{Re}(X e^{-i\theta} \times \rho e^{i\theta}) + X^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2X\rho + X^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \geq 0.$$

On peut alors raisonner comme dans le cas réel : le polynôme  $Q$  est à coefficients réels, de degré 2 et toujours positif, donc son discriminant est  $\leq 0$ . Cela nous donne précisément l'inégalité de Cauchy-Schwarz (en notant que  $\rho = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|$ ). En cas d'égalité, cela signifie que le discriminant est nul, donc il existe une racine pour un certain  $X \in \mathbb{R}$ . En posant  $\lambda = X e^{-i\theta}$ , on trouve alors

$$0 = P(\lambda) = \langle \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \rangle.$$

Comme le produit scalaire est défini positif on en déduit que  $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} = 0$ , donc  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont bien liés!  $\square$

**Application.** Soient  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  dans  $\mathbb{C}^n$ . En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  et  $\mathbf{y}$ , on trouve

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right|^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right),$$

avec égalité si et seulement si  $\bar{\mathbf{x}}$  et  $\mathbf{y}$  sont liés.