Algèbre 4 - Cours 1
Formes bilinéaires

Printemps 2023

Table des matières

0 Avertissement et remarques hors-programme (HP)

Rappel. Soit K un corps (typiquement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E, F deux K-espaces vectoriels. On dit que $f : E \to F$ est une *application linéaire* si pour tous $\lambda, \mu \in K$ et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ on a :

$$f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}).$$

On dit aussi que f est un *morphisme d'espaces vectoriels*.
Si $F = E$, on dit que f est un *endomorphisme*. Si $F = K$, on dit que f est une *forme linéaire*.

Soit n, m deux entiers > 0 et $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ une matrice $n \times m$ à coefficients dans K. La transposée de A est la matrice

$${}^tA = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

de taille $m \times n$ définie par $b_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. Autrement dit, la i-ème ligne de ${}^tA$ correspond à la i-ème colonne de A. La transposée transforme une matrice colonne en une matrice ligne, et vice versa. Une matrice carrée A est dite *symétrique* si $A = {}^tA$ et *antisymétrique* si ${}^tA = -A$.

Remarque hors-programme. Seul le cas $K = \mathbb{R}$ est au programme. Cependant, tous les résultats des Sections 1 à 3 restent valables en remplaçant le corps $\mathbb{R}$ par un corps quelconque K

(le cas $K = \mathbb{C}$ est un exemple classique important). C'est également le cas pour les sections 4 et 5 en supposant que K est de caractéristique $\neq 2$ (puisqu'on a des formules où on divise par 2). Dans le cadre des examens, on se limitera à $K = \mathbb{R}$.

1 Formes bilinéaires

Dans cette partie V désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 1.1. On dit que $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ est une *forme bilinéaire* (sur V) si elle est linéaire en chacune des variables, autrement dit :

- Pour tout $\mathbf{x} \in V$ fixé, la fonction $\varphi(\mathbf{x}, \cdot) : \left\{ \begin{array}{l} V \to \mathbb{R} \\ \mathbf{y} \mapsto \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{array} \right.$ est linéaire, c'est-à-dire que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et pour tous $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$, on a
$$\varphi(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}_1 + \mu\mathbf{y}_2) = \lambda\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \mu\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2).$$
- Pour tout $\mathbf{y} \in V$ fixé, la fonction $\varphi(\cdot, \mathbf{y}) : \left\{ \begin{array}{l} V \to \mathbb{R} \\ \mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{array} \right.$ est linéaire, c'est-à-dire que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et pour tous $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$, on a
$$\varphi(\lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \lambda\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \mu\varphi(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}).$$

Définition 1.2. Soit $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On dit que φ est *symétrique* si pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ on a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. On dit que φ est *antisymétrique* si pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ on a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Remarque. L'ensemble des formes bilinéaires (resp. bilinéaires symétriques, resp. bilinéaires antisymétriques) sur V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Autrement dit, si φ_1, φ_2 sont deux formes bilinéaires sur V et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\varphi_1 + \varphi_2$ et $\lambda\varphi_1$ sont des formes bilinéaires sur V.

Exemple(s)

- $V = \mathbb{R}^n$. Le produit scalaire cononique $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$ défini pour tous $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ par
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
est une forme bilinéaire symétrique.
- $V = \mathbb{C}^n$ et φ définie pour tous $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ dans $\mathbb{R}^n$ par
$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$
C'est une forme bilinéaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V (attention, ce n'est PAS un produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$).
- $V = \mathbb{R}^2$. La fonction φ définie pour tous $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ par
$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 5x_1y_2 - 3x_2y_1$$
est une forme bilinéaire (non symétrique).
- $V = \mathbb{R}^2$ et $\varphi = \det$ défini pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ par
$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$$
(forme bilinéaire antisymétrique).

- Soient $a < b$ deux réels et soit $V = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[a,b]$ (dimension infinie). L'application $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ définie pour tous $f, g \in V$ par
$$\varphi(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{dx}$$
est une forme bilinéaire symétrique.
- Soit $V = \{\mathbf{u} = (u_n)_{n\geq} \mid \sum_{i=0}^{\infty} u_n^2 < \infty\}$ (c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie). Alors $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ définie pour tout $\mathbf{u} = (u_n)_{n\geq 0}$ et $\mathbf{v} = (v_n)_{n\geq 0}$ par
$$\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i v_i$$
est une forme bilinéaire symétrique (on verra que c'est même un produit scalaire).

  Remarque. En utilisant l'inégalité $|ab| \leq (a^2+b^2)/2$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on peut montrer que la série définissant $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v})$ est absolument convergente. En effet
$$\sum_{i=0}^{\infty} |u_i v_i| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2}(u_i^2 + v_i^2) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} v_i^2 < \infty \quad (\text{car } \mathbf{u},\mathbf{v} \in V).$$

2 Représentation matricielle d'une forme bilinéaire

Soit V un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de V et φ une forme bilinéaire sur V.

Remarque. Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. On écrit $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ et $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$ avec $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ pour tout i. Alors pour calculer $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ il suffit de connaître seulement les $\varphi(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$. En effet, par bilinéarité on a :
$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n, \mathbf{y}) = x_1\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{y}) + \cdots + x_n\varphi_(\mathbf{e}_n,\mathbf{y}).$$
Par ailleurs, pour $i = 1, \dots, n$, on a
$$\varphi(\mathbf{e}_i,\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{e}_i, y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n) = y_1\varphi(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_1) + \cdots + y_n\varphi(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_n).$$
Finalement, en injectant dans la première égalité, on trouve
$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = {} & x_1y_1\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) + \cdots + x_1y_n\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_n) \\ & + x_2y_1\varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1) + \cdots + x_ny_2\varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_n) \\ & \vdots \\ & + x_ny_1\varphi(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1) + \cdots + x_ny_n\varphi(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_n).\end{aligned}$$
Autrement dit, les n^2 valeurs $\varphi(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$ permettent de caractériser entièrement φ.

Remarque. C'est similaire au fait qu'une application linéaire sur V est entièrement caractérisée par les valeurs qu'elle prend sur une base de V.

Définition 2.1. La matrice $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ de φ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice $n \times n$ dont le coefficient d'indice (i,j) (i-ème ligne et j-ème colonne, avec $i,j \in \{1,\dots,n\}$) est $\varphi(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$. Autrement dit
$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) & \cdots & \varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_n) \\ \varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1) & \cdots & \varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1) & \cdots & \varphi(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_n) \end{pmatrix}.$$

Les calculs précédents et la définition du produit matriciel impliquent le résultat suivant.

Proposition 2.2. *En notant* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *et* $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$*, on a la formule*

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t(X)AY.$$

Remarque importante. Attention ! La matrice $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ représentant φ dépend du choix de la base $\mathcal{B}$! Une forme bilinéaire donnée a donc plusieurs représentations matricielles possibles (suivant le choix de la base). Quand on veut faire des calculs explicites avec des coordonnées, il est nécessaire de représenter φ dans une base.

Exemple(s). $V = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}$ = base canonique (c'est-à-dire $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Etant donné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ on écrit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

- On considère le produit scalaire canonique φ défini par $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$. Alors $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En effet, $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1$ et $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0$, d'où la première ligne de $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. De même $\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 0$ et $\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 = 1$, d'où la deuxième ligne de $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.
- On considère le déterminant $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 - x_2y_1$. Après calcul, on trouve $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Soit φ la forme bilinéaire définie par $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + 3x_2y_2$. Alors $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (on calcule les $\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$). On vérifie qu'on a bien

$$^tXM_{\mathcal{B}}(\varphi)Y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix} = x_1y_2 + 3x_2y_2 = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

3 Changement de bases

Soit V un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie n. On considère deux bases $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ de V. Soit $\mathbf{x} \in V$ dont les coordonnées sont $X = (x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, et $X' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Rappels sur les changements de bases. But : Trouver une relation entre X et X'.

Définition 3.1. La *matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$, parfois notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ ou $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, est la matrice inversible P dont la j-ème colonne correspond au vecteur e'_j écrit dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 3.2. *Soient* P*,* X *et* X' *comme ci-dessus. On a la relation*

$$X = PX'.$$

Soit f *un endormorphisme de* V*, et* M *(resp.* M'*) sa matrice dans la base* $\mathcal{B}$ *(resp.* $\mathcal{B}'$*). Alors*

$$M' = P^{-1}MP.$$

On considère maintenant une forme bilinéaire φ sur V. Le but est maintenant de trouver une relation entre la représentation matricielle de φ dans la base $\mathcal{B}$ et sa représentation dans la base $\mathcal{B}'$.

Proposition 3.3. *Soient* $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ *et* $A' = M_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ *les représentations de* φ *dans* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *respectivement. Notons* P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$*. Alors*

$$A' = {}^tPAP.$$

Démonstration. Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ de coordonnées X et Y (resp. X' et Y') dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$). D'après la proposition 3.2, on a $X = PX'$ et $Y = PY'$. Par ailleurs, par définition de la représentation matricielle de φ, on a

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t(X')A'Y' = {}^tXAY = {}^tPX'A(PY') = {}^t(X')({}^tPAP)Y'.$$

(rappelons que ${}^tMN = {}^tN{}^tM$ pour tout M, N). Donc pour tout X', Y', on a

$${}^t(X')A'Y' = {}^t(X')({}^tPAP)Y'.$$

En choisissant $\mathbf{x} = \mathbf{e}'_i$ et $\mathbf{y} = \mathbf{e}'_j$ (de sorte que X' est le vecteur colonne avec que des zéros, sauf un 1 à la i-ème place, idem pour Y' avec un 1 à la j-ème place), on en déduit que le coefficient d'indice (i, j) de A' est égal au coefficient d'indice (i, j) de ${}^tPAP$ pour $i, j = 1, \ldots, n$. Autrement dit $A' = {}^tPAP$. □

Exemple(s). Soit $V = \mathbb{R}^2$ et φ définie par $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + 3x_2y_2$ (cf. exemple précédent). On note $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ la base canonique. On a vu que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ avec $\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On cherche à trouver $A' = M_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.

Première méthode. On utilise la définition et on calcule les $\varphi(e'_i, e'_j)$. On trouve $\varphi(e'_1, e'_1) = 0 \times (-1) + 3 \times (-1) \times (-1) = 3$, $\varphi(e'_1, e'_2) = 0$, $\varphi(e'_2, e'_1) = -1$ et $\varphi(e'_2, e'_2) = 0$. D'où

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deuxième méthode. On va utiliser la formule de changement de bases.

- On détermine d'abord P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (on écrit $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$). On a

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- On a alors $A' = {}^tPAP$. On trouve

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4 Formes bilinéaires symétriques

(HP : Les résultats de cette partie sont vrais en remplaçant $\mathbb{R}$ par un corps quelconque de caractéristique $\neq 2$, par exemple $K = \mathbb{C}$). Soit V un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n. On considère une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de V et φ une forme bilinéaire sur V. Rappelons que φ est symétrique (resp. antisymétrique) si $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ (resp. $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$) pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Définition 4.1. On note $\mathrm{BLS}(V)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur V.

Exemple(s)(de formes bilin. symétriques). Avec $V = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}$ sa base canonique.

- Pour $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$, on a $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Pour $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$, on trouve $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On remarque que ces matrices sont elles-mêmes symétriques (c'est-à-dire vérifient ${}^tA = A$).

Proposition 4.2. *Soit $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ la matrice de φ dans $\mathcal{B}$. Alors φ est une forme bilinéaire symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si A est une matrice symétrique (resp. antisymétrique).*

Démonstration. Supposons φ symmétrique (resp. antisymétrique). Alors pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ on a $\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \varphi(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$ (resp. $\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = -\varphi(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$). Par définition de A, son coefficient d'indice (i, j) est égal (resp. est l'opposé) du coefficient d'indice (j, i). Donc A est symétrique (resp. antisymétrique).

Réciproquement, supposons A symétrique, de sorte que ${}^tA$ est égale à A. Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ de coordonnées X et Y respectivement (dans $\mathcal{B}$). Comme ${}^tXAY$ est une matrice de taille 1×1 elle est symétrique, donc égale à sa transposée ! D'où

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^tXAY = {}^t({}^tXAY) = {}^tY\,{}^tAX = {}^tYAX = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

(car ${}^t({}^tX) = X$ et ${}^tA = A$). Donc φ est bien symétrique.

De même, si on suppose A antisymétrique, c'est-à-dire que ${}^tA = -A$, on trouve $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -{}^tYAX = -\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, donc φ est bien antisymétrique. □

Remarque. Si φ est antisymétrique, alors $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x}$, c'est-à-dire $2\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. On en déduit que $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in V$ (HP : attention, sur un corps quelconque il faut que $2 \neq 0$ pour pouvoir appliquer ce raisonnement). Cela implique que les coefficients diagonaux de A sont tous nuls.

Proposition 4.3. *Toute forme bilinéaire φ sur V se décompose comme somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire antisymétrique :*

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \underbrace{\frac{\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{2}}_{\textit{symétrique}} + \underbrace{\frac{\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{2}}_{\textit{antisymétrique}} \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V).$$

Pour aller plus loin.

L'application $F : \left\{ \begin{array}{rl} \{\text{formes bilin. sur } V\} & \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto M_{\mathcal{B}}(\varphi) \end{array} \right.$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre

- le $\mathbb{R}$-ev des formes bilinéaires sur V et l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- le $\mathbb{R}$-ev des formes bilinéaires symétriques sur V, qu'on a noté $\mathrm{BLS}(V)$, et l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- le $\mathbb{R}$-ev des formes bilinéaires antisymétriques sur V et l'espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. ;

Démonstration. (Esquisse) :

(a) Montrer que F est $\mathbb{R}$-linéaire (donc que c'est bien un morphisme de $\mathbb{R}$-ev). C'est à peu près immédiat en utilisant le fait que le coefficient (i, j) de $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

(b) Montrer que F est injective, c'est-à-dire que si $M_{\mathcal{B}}(\varphi_1) = M_{\mathcal{B}}(\varphi_2)$ alors $\varphi_1 = \varphi_2$ (utiliser la Proposition 2.2).

(c) Montrer enfin que $F : \{\text{formes biliénaires}\} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $F : \mathrm{BLS}(V) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, resp. $F : \{\text{formes biliénaires antisymétriques}\} \to \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) est surjective. Pour cela, il suffit de voir que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ correspond à une forme bilinéaire (il suffit de définir φ via la formule de la Proposition 2.2 !).

□

5 Formes quadratiques

(HP : Les résultats de cette partie sont vrais en remplaçant $\mathbb{R}$ par un corps quelconque de caractéristique $\neq 2$, par exemple $K = \mathbb{C}$). Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n.

Définition 5.1. Soit $\varphi \in \mathrm{BLS}(E)$, l'espace des formes bilinéaires symétriques sur E. On appelle *forme quadratique associée à* φ l'application $q_\varphi = q : E \to \mathbb{R}$ définie par $q(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in E$. La fonction φ est appelée la *forme polaire* de q. On note $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E.

Remarque. Attention, q n'est plus une application linéaire !

Remarque HP (pour la culture). L'espace $\mathcal{Q}(E)$ est isomorphe à l'espace des polynômes homogènes de degré 2 à n variables et à coefficients réels.

Exemple(s). $E = \mathbb{R}^2$ et $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2$ où $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ (forme bilin. symétrique). On a alors

$$q_\varphi(\mathbf{x}) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2.$$

Définition 5.2. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $q \in \mathcal{Q}(E)$ de forme polaire $\varphi \in \mathrm{BLS}(E)$. On note

$$M_\mathcal{B}(q) := M_\mathcal{B}(\varphi).$$

C'est une matrice symétrique.

Le prochain résultat montre que la forme quadratique q_φ caractérise entièrement φ, autrement dit on peut reconstituer la forme bilinéaire symétrique φ à partir de q_φ seulement.

Proposition 5.3. *Soit $\varphi \in BLS(E)$. Pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a*

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\Big(q_\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q_\varphi(\mathbf{x}) - q_\varphi(\mathbf{y})\Big) = \frac{1}{4}\Big(q_\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q_\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y})\Big).$$

Démonstration. Par bilinéarité + symétrie, on trouve

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{y}) \qquad \text{(linéaire à droite)} \\ &= \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \qquad \text{(linéaire à gauche)} \\ &= q_\varphi(\mathbf{x}) + q_\varphi(\mathbf{y}) + 2\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \qquad (\text{symétrie : } \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})). \end{aligned}$$

La première égalité de la proposition en découle facilement. De même, un calcul similaire donne

$$q(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = q_\varphi(\mathbf{x}) + q_\varphi(\mathbf{y}) - 2\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

et en combinant avec les calculs précédent on trouve $q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 4\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. □

Remarque HP. Sur un corps quelconque K on a besoin ici de supposer que la caractéristique de K est $\neq 2$ car on divise par 2.

Pour aller plus loin.

Proposition 5.4. *L'appplication* $\Phi : \left\{ \begin{array}{c} BLS(E) \to \mathcal{Q}(E) \\ \varphi \mapsto q_\varphi \end{array} \right.$ *est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev.*

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathcal{Q}(E)$ est un $\mathbb{R}$-ev. Soient $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On note φ_1 et φ_2 respectivement les formes polaires de q_1 et q_2. Soit $\mathbf{x} \in E$. Alors

$$\lambda q_1(\mathbf{x}) + \mu q_2(\mathbf{x}) = \lambda\varphi_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mu\varphi_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Or $\varphi := \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 \in \mathrm{BLS}(E)$ (car $\mathrm{BLS}(E)$ est un $\mathbb{R}$-ev), et la formule précédente montre que $q := \lambda q_1 + \mu q_2$ est la forme quadratique associée à φ. Donc $q \in \mathcal{Q}(E)$.

L'application Φ est clairement $\mathbb{R}$-linéaire (autrement dit $q_{\lambda\varphi_1+\mu\varphi_2} = \lambda q_{\varphi_1} + \mu q_{\varphi_2}$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tous $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{BLS}(E)$).

La fonction Φ est surjective par définition de $\mathcal{Q}(E)$.

Il reste à montrer que Φ est injective, c'est-à-dire que si $q_{\varphi_1} = q_{\varphi_2}$, alors $\varphi_1 = \varphi_2$. Cela découle de la Proposition 5.3 (qui implique que φ est entièrement déterminée par q).

□

6 Produit scalaire et premiers exemples

Dans cette partie E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension finie ou infinie). HP : on a une théorie similaire sur le corps $K = \mathbb{C}$ mais les choses sont plus compliquées (voir Partie 8).

Définition 6.1. On appelle produit scalaire sur E toute application $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que

- Pour tout $\mathbf{x} \in E$, $\langle\mathbf{x},\cdot\rangle$ est linéaire ;
- Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle$ (symétrique)
- Pour tout $\mathbf{x} \in E \setminus \{0\}$ on a $\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle > 0$ (on dit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est *définie positive*).

Remarque. Les deux premières conditions sont équivalentes à dire que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique (en effet, si φ est linéaire à droite et symétrique, alors elle est aussi linéaire à gauche).

Définition 6.2. Un espace *préhilbertien réel* est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire. Si E est de dimension finie, on dit que c'est un *espace euclidien.*

Remarque. Disposer d'un produit scalaire sur un espace vectoriel E donne une structure géométrique supplémentaire. On verra entre autres qu'on peut associer une norme au produit scalaire, ce qui fait de E un espace vectoriel normé.

Notations. Le produit scalaire entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ est parfois noté $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$, $\langle\mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y})$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, etc.

Exemple(s)

- Sur $\mathbb{R}^n$. Soient $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
  - Produit scalaire usuel / canonique défini par $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$
  - Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$. Produit scalaire défini par $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \alpha_1x_1y_1 + \cdots + \alpha_nx_ny_n$ (la matrice associée est la matrice de diagonale $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$).
- Sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ (fonctions réelles continues sur $[0,1]$).
  - $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
  - $(f,g) \mapsto \int_0^1 w(t)f(t)g(t)\mathrm{d}t$, où $w : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ est continue par morceaux et ne s'annule qu'en un nombre fini de points.
- Sur $E = \ell^2(\mathbb{N}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{n\geq 0} u_n^2 < \infty\}$.
  - $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \mapsto \sum_{n\geq 0} u_nv_n$.
- Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ (polynômes réels de degré $\leq n$).
  - $(P,Q) \mapsto \int_a^b P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ (pour $a < b$ fixés). (Indication : $P \in E$ a au plus n racines).
  - $(P,Q) \mapsto \sum_0^n P(k)Q(k)$.
- sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  - $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ (Indication : si $A = (a_{ij})_{i,j}$ et $B = (b_{ij})_{i,j}$ on a $\mathrm{Tr}({}^tAB) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}b_{ij}$.

7 Inégalité de Cauchy-Schwarz et normes euclidiennes

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie. HP : les résultats de cette partie restent vrais sur $K = \mathbb{C}$ avec un produit scalaire complexe, mais les choses sont plus compliquées (voir Partie 8).

Proposition 7.1. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E (c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique définie positive : $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in E$ avec égalité si et seulement si $\mathbf{x} = 0$). Alors*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \qquad (\textit{Cauchy-Schwarz}) \tag{7.1}$$

avec égalité si et seulement si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont liés (c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ ou $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$).

Remarque. L'inégalité (8.1) est encore vraie si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est seulement une forme bilinéaire symétrique positive (c'est-à-dire que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in E$ mais qu'on pourrait avoir $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ pour des $\mathbf{x} \in E$ non nuls).

Démonstration. Si $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 0$ alors $\mathbf{y} = 0$ (puisque le produit scalaire est défini positif) et donc les deux côtés de (8.1) sont nuls. On a alors le résultat (on a aussi que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont liés puisque $\mathbf{y} = 0 \times \mathbf{x}$). On suppose désormais que $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \neq 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose $P(t) := \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle$. Comme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est supposée positive on a $P(t) \geq 0$ pour tout t. En développant par bilinéarité (+symétrie), on trouve

$$P(t) = \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \geq 0.$$

En posant $a = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$, $b = 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ et $c = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$. Le polynôme $at^2 + bt + c$ est de degré 2 (car par hypothèse a est non nul) et est toujours ≥ 0, ce qui n'est possible que si son discriminant est strictement négatif (pas de racine) ou nul (une unique racine). On trouve la condition

$$0 \geq b^2 - 4ac = 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle.$$

D'où (8.1). Supposons maintenant que (8.1) est une égalité. Alors d'après ce qui précède, le discriminant de P est égal à 0, et donc P possède une (unique) racine réelle λ. Pour $t = \lambda$, on trouve

$$0 = P(\lambda) = \langle \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \rangle.$$

Comme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive, on en déduit que $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} = 0$, donc $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont bien liés. ☐

Exemple(s).

- Sur $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. Soient $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Alors
$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$$
avec égalité si et seulement si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont liés.
- Sur $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Alors pour toutes $f, g \in E$, on a
$$\Big(\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{dt} \Big)^2 \leq \int_0^1 f(t)^2 \mathrm{dt} \int_0^1 g(t)^2 \mathrm{dt}.$$

Définition 7.2. Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

- Pour tout $\mathbf{x} \in E$ on a $N(\mathbf{x}) = 0$ si et seulement si $\mathbf{x} = 0$;
- Pour tout $\mathbf{x} \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $N(\lambda \mathbf{x}) = |\lambda| N(\mathbf{x})$ (homogénéité) ;
- Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a $N(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq N(\mathbf{x}) + N(\mathbf{y})$ (inégalité triangulaire).

Proposition 7.3. *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace Euclidien (c'est-à-dire que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E). Alors l'application $\| \cdot \| : \mathbf{x} \mapsto \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ définie une norme sur E appelée* norme euclidienne*.*

Démonstration. Puisque le produit scalaire est défini positif, on a bien $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in E$ avec égalité si et seulement si $\mathbf{x} = 0$. De plus, par bilinéarité, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\langle \lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}\rangle = \lambda^2\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$, d'où $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$. Il reste donc à montrer l'inégalité triangulaire. Soit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$. Puisque $\|\mathbf{z}\| = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle$ pour tout $\mathbf{z} \in E$, on a

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (en passant à la racine carrée) on a

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|,$$

d'où

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = \big(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\big)^2.$$

On conclut en passant à la racine carrée. □

Attention. Toutes les normes ne sont pas euclidiennes ! Par exemple, sur $\mathbb{R}^n$, les formules

- $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$ (pour $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$)
- $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$,

définissent des normes (exercices) qui ne sont pas euclidennes.

8 Cas complexe - espaces hermitiens (HP)

Soit V un $\mathbb{C}$ espace vectoriel (de dimension quelconque). Le but est d'avoir une théorie similaire à celle de la Partie 6 mais en travaillant sur $\mathbb{C}$ plutôt que $\mathbb{R}$. Les résultats de cette partie sont hors-programme mais intéressants à savoir pour la culture (notamment si vous faites de la physique car on s'en sert pour la transformée de Fourier).

Définition 8.1. On appelle produit scalaire sur V toute application $\langle \cdot, \cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ telle que

- Pour tout $\mathbf{x} \in V$, $\langle \mathbf{x}, \cdot\rangle$ est linéaire ;
- Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, on a $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle}$
- Pour tout $\mathbf{x} \in V \setminus \{0\}$ on a $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle > 0$ (on dit que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est *définie positive*).

Une application vérifiant les deux premières conditions ci-dessus est dite *sesquilinéaire*. Un produit scalaire complexe est donc une application sequilinéaire plutôt que bilinéaire (insistons : $\langle \cdot, \cdot\rangle$ n'est PAS bilinéaire). En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \overline{\lambda}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$, c'est la principale différence avec le cas réel.

Remarque. On a besoin d'introduire la conjugaison complexe pour avoir la bonne notion de “défini positif”. En effet, si on suppose $\langle \cdot, \cdot\rangle$ bilinéaire dans le cas complexe (à la place de sesquilinéaire comme dans la définition ci-dessus), alors

$$\langle i\mathbf{x}, i\mathbf{x}\rangle = i^2\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle.$$

Donc si on suppose $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle > 0$ alors on a $\langle \mathbf{x}', \mathbf{x}'\rangle < 0$ en posant $\mathbf{x}' = i\mathbf{x}$, ce qui contradirait la propriété “défini positif” (que l'on souhaite avoir pour pouvoir définir une norme par exemple).

Définition 8.2. Un espace *préhilbertien complexe* est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V muni d'un produit scalaire. Si V est de dimension finie, on dit que c'est un *espace hermitien*.

Exemple(s).

- Sur $V = \mathbb{C}^n$, on définit pour tous $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ le produit scalaire

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i = \overline{x_1} y_1 + \cdots + \overline{x_n} y_n.$$

- Sur $V = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$, on définit pour tous $f, g \in V$ le produit scalaire
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)\mathrm{dt}.$$
- Sur $V = \mathbb{C}[X]_n$, l'espace des polynômes à coefficients complexes de degré au plus n, on définit pour tous $P, Q \in V$
$$\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} \overline{P(i)}Q(i).$$

Définition 8.3. Soit $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien complexe. On associe à $\langle\cdot,\cdot\rangle$ l'application $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ définie pour tout $\mathbf{x} \in V$ par $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}$. C'est une *norme* (sur un $\mathbb{C}$-ev), c'est-à-dire qu'on a pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$:
- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\mathbf{x} = 0$;
- $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$;
- $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Pour résumer, soit $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien (réel ou complexe) sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

	$K = \mathbb{R}$	$K = \mathbb{C}$
	préhilbertien réel	préhilbertien complexe
(Si $\dim V$ finie)	espace euclien	espace hermitien
$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$	$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2$	$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle) + \|\mathbf{y}\|^2$
$\alpha \in K$	$\|\alpha\mathbf{x}\| = \|\alpha\|\|\mathbf{x}\|$	$\|\alpha\mathbf{x}\| = \|\alpha\|\|\mathbf{x}\|$
	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\Big)$	$\mathrm{Re}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle) = \frac{1}{4}\Big(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\Big)$
		$\mathrm{Im}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle) = \frac{1}{4}\Big(\|\mathbf{x}+i\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-i\mathbf{y}\|^2\Big)$

Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est encore vraie sur $\mathbb{C}$ (bien que la démonstration soit un peu plus compliquée).

Proposition 8.4. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace hermitien (c'est-à-dire que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme sesquilinéaire définie positive. Alors*
$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \qquad (\textit{Cauchy-Schwarz}) \tag{8.1}$$
avec égalité si et seulement si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont liés (c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$ ou $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$).

Remarque. N'oubliez pas les valeurs absolues dans (8.1) quand vous travaillez en complexe ! (car a priori $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2 \in \mathbb{C}$ n'est pas réel, donc ça n'aurez pas de sens de dire qu'un nombre complexe est "plus petit" qu'un réel).

Démonstration. Si $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle = 0$ alors $\mathbf{y} = 0$ (puisque le produit scalaire est défini positif) et donc les deux côtés de (8.1) sont nuls. On a alors le résultat (on a aussi que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont liés puisque $\mathbf{y} = 0 \times \mathbf{x}$). On suppose désormais que $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \neq 0$. Pour tout $t \in \mathbb{C}$ on pose $P(t) := \langle \mathbf{x}+t\mathbf{y}, \mathbf{x}+t\mathbf{y}\rangle$. Comme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est supposée positive on a $P(t) \in \mathbb{R}^+$ pour tout t. En développant par sequilinéarité, on trouve
$$\begin{aligned} P(t) = \langle \mathbf{x}+t\mathbf{y}, \mathbf{x}+t\mathbf{y}\rangle &= \langle \mathbf{x}+t\mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle + t\langle \mathbf{x}+t\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \bar{t}\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle + t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + t\bar{t}\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle. \end{aligned}$$
Notons que par propriété du produit scalaire (complexe) on a $\bar{t}\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle = \bar{t} \times \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle} = \overline{t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}$, donc finalement
$$P(t) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + 2\mathrm{Re}\big(t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\big) + |t|^2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle. \tag{8.2}$$

Comme on a $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{C}$, il existe $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \rho e^{i\theta}$. On choisit alors t de la forme $t = Xe^{-i\theta}$ avec $X \in \mathbb{R}$. En injectant dans (8.2), on obtient

$$Q(X) := P(Xe^{-i\theta}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\mathrm{Re}\big(Xe^{-i\theta} \times \rho e^{i\theta}\big) + X^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2X\rho + X^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \geq 0.$$

On peut alors raisonner comme dans le cas réel : le polynôme Q est à coefficients réels, de degré 2 et toujours positif, donc son discriminant est ≤ 0. Cela nous donne précisément l'inégalité de Cauchy-Schwarz (en notant que $\rho = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|$). En cas d'égalité, cela signifie que le discriminant est nul, donc il existe une racine pour un certain $X \in \mathbb{R}$. En posant $\lambda = Xe^{-i\theta}$, on trouve alors

$$0 = P(\lambda) = \langle \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \rangle.$$

Comme le produit scalaire est défini positif on en déduit que $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} = 0$, donc $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont bien liés ! $\square$

Application. Soient $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{C}^n$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$ et $\mathbf{y}$, on trouve

$$\Big|\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big|^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n |y_i|^2\Big),$$

avec égalité si et seulement si $\overline{\mathbf{x}}$ et $\mathbf{y}$ sont liés.