

ÉVALUATION 1 - ÉPREUVE DE SUSTITUTION
18 février 2020
8h30 - 9h15

Avertissement: Une attention particulière sera prêtée à la qualité de la rédaction. Toute réponse doit être justifiée et formulée sous la forme d'une phrase écrite en français (sujet, verbe, complément). Pour les questions de cours, on veillera à introduire les objets mathématiques considérés (les matrices et leurs tailles, nombres entiers, etc...) et à énoncer toutes les hypothèses qui doivent être vérifiées par ces objets.

Questions de cours:

- (1) Démontrer que l'inverse d'une matrice carrée est unique.
- (2) Donner la définition de la trace d'une matrice carrée.

Exercice 1:

Soit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- (1) Vérifier qu'on peut écrire $A = B + C$, avec une matrice C telle que $BC = CB = 0$.
- (2) En déduire une expression de A^{1000} .

Exercice 2:

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Calculer A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (2) La matrice A est-elle inversible ?
- (3) Si oui, calculer son inverse.