
Contrôle continu n° 4
Mardi 18 avril 2023 - Durée : 1 h 30

Questions de cours. Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$ et $u\colon E \to F$ une application linéaire.

1. Donner la définition du noyau de u.
2. On suppose que u est injective et pour un entier $n \in \mathbf{N}^*$, on considère $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille libre de E.
   Montrer que $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ est une famille libre de F.

Exercice 1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \frac{4X^2 - 3X - 1}{(X-3)(X^2+4)}\,.$$

Exercice 2. On considère l'application $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $(x,y,z) \longmapsto (x+y, x-2z)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker f$ puis donner sa dimension.
3. Est-ce que f est injective ? Justifiez.
4. Est-ce que f est surjective ? Justifiez.

Exercice 3. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et on considère les sous-ensembles de $\mathbf{R}^3$:

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x + 2y - z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x + y = 0 \text{ et } y + z = 0\}.$$

1. (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. On admet dans la suite que G est aussi un sous-espace-vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
   (b) Déterminer une base de F.
   (c) Déterminer une base de G.
   (d) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
2. On considère l'application linéaire $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $(x,y,z) \longmapsto \left(\frac{3}{2}x + y - \frac{1}{2}z, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z\right)$.
   (a) Montrer que $\ker f = G$.
   (b) i. Montrer que $\mathrm{Im} f \subset F$.
   ii. En déduire que $\mathrm{Im} f = F$.
   (c) i. Calculer $f \circ f(e_1)$, $f \circ f(e_2)$ et $f \circ f(e_3)$.
   ii. Montrer que $f \circ f = f$.