Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre de printemps 2022-2023**

L1 Math-Info | Algèbre II

Feuille d'exercices n° 5

Représentations matricielles des applications linéaires

Exercice 1. Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

1. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + 3y, -x + y)$;
2. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (y, -x + y, 2x - y)$;
3. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + 4y + z, -x + y + z)$.

Exercice 2. Déterminer le rang des matrices suivantes en les écrivant sous forme échelonnée.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On note $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $h(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3$, $h(e_2) = e_1 + e_2 - e_3$ et $h(e_3) = e_1 - 2e_3$.

1. Écrire la matrice M de h dans la base $\mathcal{B}_c$.
2. Déterminer le rang de h.

Exercice 4. On considère $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base du noyau de f.
2. Déterminer une base de l'image de f.

Exercice 5. On considère l'application linéaire $u\colon \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2$, $P \longmapsto (P(-1), P(1))$.

1. Déterminer la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 6. En utilisant les bases canoniques et des matrices appropriées, donner des démonstrations très courtes des énoncés suivants :

1. L'application f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ définie pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (3x - 2y, x + y)$ est un endomorphisme.
2. L'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } x + 2y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. L'ensemble $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y - z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 7.
On considère quatre réels a, b c et d et on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ défini par $f(X) = AX$. Écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Soit g l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ défini par $g(Y) = YA$. Écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$.
3. Soit h l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $h(M) = AM$. Écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose $f = (f_1, f_2, f_3)$ où $f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3$, $f_2 = 4e_1 + 7e_2 - 6e_3$ et $f_3 = -3e_1 - 5e_2 + 5e_3$.

1. Montrer que f est une base de E, puis écrire la matrice de passage P de e vers f.
2. On considère $v \in E$ le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans f. Quelle est sa matrice dans e ?
3. On considère $w \in E$ le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans e. Quelle est sa matrice dans f ?

Exercice 9. On note $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ et l'application linéaire

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \longmapsto (2x - y + z, -x - y, 5x - y).$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
4. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ pour l'espace de départ et la base canonique pour l'espace d'arrivée.
5. Déterminer la matrice de f dans la base canonique pour l'espace de départ et la base $\mathcal{B}$ pour l'espace d'arrivée.

Exercice 10. On note $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3$, $f(e_2) = e_2 - e_3$ et $f(e_3) = -e_1 + 4e_3$. On pose $v_1 = 2e_1 - e_2$, $v_2 = -e_1 + e_3$ et $v_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}_c$.
3. Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_c$ à la la base $\mathcal{B}$, puis calculer P^{-1}.
4. Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.
5. Écrire une relation entre les matrices A et B.

Exercice 11. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Déterminer un vecteur $u_1 \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $u_1 \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
3. Déterminer un vecteur $u_2 \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $f(u_2) = -2u_2$.
4. Déterminer un vecteur $u_3 \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $u_3 \in \ker(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
5. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Écrire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer D^n.
8. Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$.
9. Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
10. Justifier que A est inversible et calculer A^{-1}.
11. En déduire que f est bijective et calculer $f^{-1}(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 12. On considère l'application $f\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $P \longmapsto P - (X-2)P'$.
On note $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Déterminer l'image de f.
4. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{C}$.
5. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X-2, (X-2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
6. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. Calculer P^{-1}.
7. Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$?