Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre de printemps 2022-2023**

L1 Math-Info | UE : Algèbre 2

Contrôle continu n° 3

Mardi 21 mars 2023 - Durée : 45 minutes

Questions de cours. On ne redemande pas la définition de $\mathbf{R}$-espace vectoriel qu'on admet donc dans tout cet exercice.

1. Donner la définition d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel *de dimension finie.*
2. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Donner la défintion de « F et G sont supplémentaires dans E ».

Exercice 1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{3X^2 - 1}{X(X^2 - 1)}.$$

Exercice 2. Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$, l'espace vectoriel constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. Donner une base de E et en rappeler la dimension. *Pour cette seule question, on ne demande pas de justification.*
2. (a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (X(X-1), (X-1)(X+1), X(X+1))$ est une famille libre de E.
   (b) La famille $\mathcal{F}$ est-elle une base de E ? Justifier votre réponse.
   (c) Justifier que le polynôme $P = 1$ appartient à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Exercice 3. Soient $e_1 = (1,1,1)$ et $e_2 = (1,2,-1)$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$. On pose

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x+y+z = 0\}$$

et $G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. *On admet que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.*

1. Déterminer une base de F. Donner la dimension de F.

On admet que (e_1, e_2) est une base de G.

2. En déduire que les sous-espaces vectoriels F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
3. Les sous-espaces F et $\mathrm{Vect}(e_1)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$?
4. L'ensemble $F \cup \mathrm{Vect}(e_1)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$?