# Espace vectoriel de polynômes.

On sait que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel (cours).
$\mathbb{R}_n[X]$ admet ainsi une base. La base la "plus simple" est la base canonique. En général on la note $e = \{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}, e_n\}$,
avec $\forall k \in [\![1, n]\!]$ : $e_k = X^k$.

Par exemple pour $\mathbb{R}_3[X]$, la base canonique est $e = \{\underbrace{1}_{e_0}, \underbrace{X}_{e_1}, \underbrace{X^2}_{e_2}, \underbrace{X^3}_{e_3}\}$.

Dans cet espace on peut représenter un polynôme par un vecteur et vice versa.

De manière vectorielle : $e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = d\underbrace{e_0}_{1} + c\underbrace{e_1}_{X} + b\underbrace{e_2}_{X^2} + a\underbrace{e_3}_{X^3}$$ ) représentation vectorielle

$$d + cX + bX^2 + aX^3$$ ) représentation polynomiale.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

## Exercice 22

1) $f_1 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $f_1(P) = P'$

$f_1$ est une fonction qui prend en entrée un polynôme et renvoie un polynôme.

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, de manière générale il s'écrit sous la forme :

forme polynomiale

$$P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

Dans la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ on peut écrire P comme un vecteur :

forme vectorielle

$$P = (\underbrace{d}_{1}, \underbrace{c}_{X}, \underbrace{b}_{X^2}, \underbrace{a}_{X^3})$$

Rmq : pourquoi le vecteur est "à l'envers" : $(d, c, b, a)$ et pas $(a, b, c, d)$ ?
→ c'est juste une convention, on a l'habitude de parcourir l'alphabet dans l'ordre pour les coefficients des polynômes, en partant du plus haut degré, mais on a l'habitude d'écrire la base dans l'ordre croissant des degrés.

$$f_1(P)(X) = P'(X) = 3aX^2 + 2bX + c$$

Sous forme vectorielle :

$$P' = (\underbrace{c}_{1}, \underbrace{2b}_{X}, \underbrace{3a}_{X^2})$$

Rmq :

On aurait écrit

$P' = (\underset{1}{c}, \underset{X}{2b}, \underset{X^2}{3a}, \underset{X^3}{0})$

dans le cas où $f_1 : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$

mais on se doutait à l'avance que la dernière composante (le coefficient devant $X^3$) serai toujours nul en prenant la dérivée, c'est pourquoi on s'est restreint à $\mathbb{R}_2[X]$ comme espace d'arrivée.

Au final on peut donc voir $f_1$ de la manière suivante :

$$f_1(d, c, b, a) = (c, 2b, 3a)$$

Ça ressemble beaucoup plus à ce qu'on a l'habitude de faire dans $\mathbb{R}^n$ !

$f_1$ se représente matriciellement dans les bases canoniques :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$