Résumé sous-espaces supplémentaires et autres notions

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Familles

1.1 Famille génératrice

Définition. Une famille finie $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ de E est *génératrice* si

$$\forall x \in E \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$$

Méthode. Pour montrer qu'une famille est génératrice, une première méthode consiste à considérer tout vecteur x de E, et à le décomposer comme combinaison linéaire d'éléments de la famille (i.e. sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$).

1.2 Famille libre

Définition. Une famille finie $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ de E est *libre* si

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \right)$$

Méthode. Pour montrer qu'une famille est libre, une première méthode consiste à considérer une décomposition de 0 comme combinaison linéaire d'éléments de la famille (i.e. sous la forme $0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$), et à montrer que tous les λ_i sont nuls.

1.3 Base

Définition. Une famille finie $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ de E est une *base* de E si elle est libre et génératrice.

Théorème. Une famille finie $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ de E est une base de E si et seulement si

$$\forall x \in E \quad \exists\,!\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$$

Méthode. Pour montrer qu'une famille est une base, une première méthode consiste à considérer tout vecteur x de E, et à le décomposer comme unique combinaison linéaire d'éléments de la famille (i.e. sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, avec les λ_i déterminés de manière unique).

Méthode. Pour montrer qu'une famille est une base, une deuxième méthode consiste à montrer d'une part qu'elle est génératrice, d'autre part qu'elle est libre.

1.4 Cas de la dimension finie

Théorème. Si $\dim E = n < \infty$ et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes

(1) $\mathcal{F}$ est génératrice,

(2) $\mathcal{F}$ est libre,

(3) $\mathcal{F}$ est une base.

Méthode. Pour montrer qu'une famille est une base ou est génératrice, si on est dans le cas du théorème ci-dessus, souvent le plus simple est de montrer qu'elle est libre.

Remarque. Dans le cas de matrices, on a d'autres méthodes. Par exemple, "$(f_1, \ldots, f_n)$ une base" est caractérisé par le fait que $\det(f_1, \ldots, f_n) \neq 0$.

2 Espaces

Soient F, G deux sous-espaces-vectoriels de E.

2.1 Somme génératrice

Définition. On écrit $E = F + G$ si

$$\forall x \in E \quad \exists y \in F, z \in G \qquad x = y + z$$

Méthode. Pour montrer que $E = F + G$, une première méthode consiste à considérer tout vecteur x de E, et à le décomposer comme somme d'éléments de F et de G.

2.2 Somme directe

Définition. On écrit $F \oplus G$ et on dit que F et G sont en *somme directe* si

$$F \cap G = \{0\}$$

Méthode. Pour montrer que $F \oplus G$, une première méthode consiste à considérer un élément de l'intersection, et à montrer qu'il est nul.

2.3 Espaces supplémentaires

Définition. On écrit $E = F \oplus G$ et on dit que F et G sont en *supplémentaires* dans E si $E = F + G$ et $F \oplus G$.

Théorème. On a $E = F \oplus G$ si et seulement si

$$\forall x \in E \quad \exists\,!\, y \in F, z \in G \qquad x = y + z$$

Méthode. Pour montrer que $E = F \oplus G$, une première méthode consiste à considérer tout vecteur x de E, et à le décomposer comme unique somme d'éléments de F et de G (i.e. en $x = y + z$ avec $y \in F, z \in G$ uniquement déterminés).

Méthode. Pour montrer que $E = F \oplus G$, une deuxième méthode consiste à montrer d'une part que $E = F + G$, d'autre part que $F \oplus G$.

2.4 Cas de la dimension finie

Théorème de Grassmann. Si $\dim E = n < \infty$, alors on a $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Méthode. On peut se servir de ce théorème pour relier dimensions et propriétés des somme de sous-espaces vectoriels, les dimensions étant souvent plus faciles à manipuler.

Par exemple, on en déduit le théorème suivant :

Théorème. Si $\dim E = n < \infty$, alors on a $E = F \oplus G$ si et seulement si (au moins) deux des trois propriétés suivantes sont vérifiées

(1) $E = F + G$,

(2) $F \oplus G$,

(3) $\dim E = \dim F + \dim G$.

Auquel cas les trois propriétés sont vraies.

Preuve. Supposons (1) et (2) et montrons (3). D'après Grassmann on a $\dim E = \dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$, mais $F \cap G = \{0\}$ donc on obtient (3).

Supposons (1) et (3) et montrons (2). D'après Grassmann on a $\dim F + \dim G = \dim E = \dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$, donc $F \cap G = \{0\}$ donc on obtient (2).

Supposons (2) et (3) et montrons (1). D'après Grassmann on a $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G = \dim E$, donc $\dim(F + G) = \dim E$ donc on obtient (1). $\square$

Méthode. Pour montrer que $E = F \oplus G$, si on est dans le cas du théorème ci-dessus, souvent le plus simple est de montrer que $F \oplus G$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.