Corrigé CC1

Question de Cours

- α equation $A\vec{x}=\vec{b}$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ a des solutions $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ ssi $rg(A) = \underbrace{rg(A,\vec{b})}_{\text{Matrice augmenté}}$

i.e. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \vec{b}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

* pour avoir le rang :
1) échelonner la matrice
2) Donc, le rang c'est le nombre de lignes non-nulles

p.exple

- soit $A \in \mathcal{M}_n$
  - $l_i \leftarrow l_i + \lambda l_j$ $j \neq i$ avec $i,j \in \{1,\dots,n\}$ $\lambda \neq 0$
    Determinant reste inchangé.
  - $l_i \leftrightarrow l_j$
    change le rang de determinant (en multipliant par -1)
  - $l_i \leftarrow \lambda l_i$ $\lambda \neq 0$.
    multiplie le determinant par λ.

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} ; \quad \vec{b}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) **1ᵉʳ Méthode**

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (6-8) - 1 \times (6-4) + 2(6-3)$$

$$= -2 - 2 + 6$$

$$\boxed{\det A = 2}$$

2ᵐᵉ Méthode

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad l_3 \leftarrow l_3 - l_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad l_2 \leftarrow l_2 - 3l_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad l_2 \leftrightarrow l_3 \quad \rightarrow \text{rang} = 3$$

$$= -(1 \times 1 \times (-2))$$

$$\boxed{\det A = -2}$$

b) Determinons l'inverse de la matrice A.

1ᵉʳ Méthode

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (C_{ij})_{ij}^{T}}$$

$$C_{1,1} = \underbrace{(-1)^{1+1}}_{(-1)^2 = 1} \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2$$

$$C_{1,2} = \underbrace{(-1)^{1+2}}_{(-1)^3 = -1} \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6-4) = -2$$

$$C_{1,3} = (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3$$

$$C_{2,1} = (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2-4) = 2$$

$$C_{2,2} = (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{2,3} = (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{3,1} = (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{3,2} = (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$$

$$C_{3,3} = (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}^{T}$$

$$= \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

transposé

2ème Méthode

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \ell_2 \leftarrow \ell_2 - 3\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \ \ell_2 \leftrightarrow \ell_3$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \ \ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \ \ell_1 \leftarrow \ell_1 + \ell_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \ \ell_3 \leftarrow -\tfrac{1}{2}\ell_3 \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Trouvons les solutions de $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Exercice 2

1er Méthode

$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 2x + y - 3z = 4\}$

équation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 2t + 3u \\ z = u \end{cases}$, $t, u \in \mathbb{R}$

Version 1

$\det A = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\vec{x} = (2, 1, -3)$

2ème Méthode

$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -1-0 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \iff \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \mid \vec{AM} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$

$\iff \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{lcl} x - 2 & = & -2\lambda - \mu \\ y & = & 4\lambda - \mu \\ z & = & -\mu \end{array}$

forme param. $\begin{cases} x = -2\lambda - \mu + 2 \\ y = 4\lambda - \mu \\ z = \mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$