

Examen final d'Algèbre 2

Corrigé

Exercice 1:

1) On applique à P la méthode du Pivot de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -4L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 16 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -12 & -15 & -6 & 0 & 3 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 16 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5 & 12 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & 15 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5 & 12 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \end{array} \right)$$

Donc P est inversible

$$\text{et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Le calcul donne $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Comme D est une matrice diagonale on a $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^k$.

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons H_n la propriété " $A^n = PD^nP^{-1}$ ".

Initialisation : Comme $D = P^{-1}AP$ on a $PD^{-1}P^{-1} = \underbrace{P^{-1}P}_= I_3 \underbrace{A^{-1}P^{-1}P}_= I_3 = A^{-1}$ donc H_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons H_n vraie et montrons qu'alors H_{n+1} est vraie.

Si $A^n = PD^nP^{-1}$ alors $A^{n+1} = A^n \cdot A = \underbrace{PD^nP^{-1}}_= I_3 \cdot PD^{-1}P^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$

donc H_{n+1} est vraie.

Conclusion : par le principe de récurrence, $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^k$.

5) Le calcul donne

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2^n & -12+2^{n+1} & 3-2^n \\ 4-2^{n+1} & -8+2^{n+2} & 6-2^{n+1} \\ 2-2^{n+1} & -4+2^{n+2} & 3-2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

1) $A = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$

2) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4z = 0 \\ 3y = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = -z(2, 0, 1) \Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{vect}((2, 0, -1))$$

Donc $\text{Ker}(f) = \text{vect}((2, 0, -1))$. Comme $(2, 0, -1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ la famille $\{(2, 0, -1)\}$ est libre et engendre $\text{Ker}(f)$. C'est donc une base de $\text{Ker}(f)$.

3) f n'est pas injective puisque $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

4) Par le théorème du rang on a $\dim \ker(f) + \text{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^3$ donc
 $\text{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker(f) = 3 - 1 = 2$.

5) On a $\dim \text{Im}(f) = \text{rg}(f) = 2$ donc $\text{Im}(f) \subsetneq \mathbb{R}^3$ donc f n'est pas surjective.

6) On sait que $\text{Im}(f)$ est de dimension 2. Il nous suffit donc de trouver deux vecteurs de $\text{Im}(f)$ formant une famille libre pour obtenir une base.

Notons que $f(e_1) = -2e_1 + 2e_3 = (-2, 0, 2)$ et $f(e_2) = 3e_2 = (0, 3, 0)$ forment une famille libre. Soit λ et $\mu \in \mathbb{R}$. On a:

$$\lambda(-2, 0, 2) + \mu(0, 3, 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow (-2\lambda, 3\mu, 2\lambda) = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Donc $(-2, 0, 2), (0, 3, 0)$ est une base de $\text{Im}(f)$.

7) a) et b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in G \Leftrightarrow x - 2y + z = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2y - z$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (2y - z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{vect}((2, 1, 0), (-1, 0, 1))$$

Donc $G = \text{vect}((2, 1, 0), (-1, 0, 1))$ donc G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Soit λ et $\mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\lambda(2, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow (2\lambda - \mu, \lambda, \mu) = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Donc la famille $((2, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est libre et engendre G . C'est

donc une base de G .

En particulier $\dim G = 2$.

c) Montrons que $\text{Ker}(f)$ et G sont en somme directe.

Soit $u \in \text{Ker}(f) \cap G$.

Comme $u \in \text{Ker}(f)$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $u = \alpha(2, 0, -1) = (2\alpha, 0, -\alpha)$.

Comme $u \in G$ on a $2\alpha - 2 \times 0 + (-\alpha) = 0$ donc $\alpha = 0$ donc $u = (0, 0, 0)$.

Donc $\text{Ker}(f) \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Comme $\dim \text{Ker}(f) + \dim G = 1 + 2 = \dim \mathbb{R}^3$

$\text{Ker}(f)$ et G sont bien supplémentaires.

8) a) Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \alpha(2, 0, -1) + \beta(1, 0, -1) + \gamma(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (2\alpha + \beta, \gamma, -\alpha - \beta) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Donc (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de \mathbb{R}^3 à trois éléments.

Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, c'est une base de \mathbb{R}^3 .

$$b) \text{ On a } A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } f(v_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ donc } f(v_2) = (2, 0, -2) = 2v_2$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } f(v_3) = (0, 3, 0) = 3v_3$$

c) Comme $f(v_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $f(v_2) = 2v_2$ et $f(v_3) = 3v_3$ on a :

$$B = \text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix}$$

Exercice 3 :

1) Soit P, Q deux polynômes dans $\mathbb{R}_2[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha P + Q)(x) &= x(\alpha P + Q)'(x) - (\alpha P + Q)(x+1) \\ &= x(\alpha P'(x) + Q'(x)) - (\alpha P(x+1) + Q(x+1)) \\ &= \alpha(xP'(x) - P(x+1)) + xQ'(x) - Q(x+1) \\ &= \alpha\Psi(P)(x) + \Psi(Q)(x)\end{aligned}$$

Donc Ψ est linéaire

2) On a $\Psi(1) = x \cdot 0 - 1 = -1$

$$\Psi(x) = x \cdot 1 - (x+1) = -1$$

$$\Psi(x^2) = x(2x) - (x+1)^2 = 2x^2 - x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x - 1$$

$$\text{Donc } A = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\Psi) = \begin{pmatrix} \Psi(1) & \Psi(x) & \Psi(x^2) \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{matrix}$$

3) Soit $P(x) = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$.

$$P \in \text{Ker}(\Psi) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - b - c = 0 \\ -2c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \text{Ker}(\Psi) = \{P(x) = a(1-x), a \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(1-x).$$

Comme $1-x \neq 0_{\mathbb{R}_2[x]}$, $(1-x)$ est une base de $\text{Ker}(\Psi)$ qui est donc de dimension 1.

4) Par le théorème du rang :

$$\text{rg}(\Psi) = \dim \mathbb{R}_2[x] - \dim \text{Ker}(\Psi) = 3 - 1 = 2$$

5) Comme $\dim \mathcal{L}_m \Psi = 2$, il suffit de trouver deux polynômes de $\mathcal{L}_m(\Psi)$ qui forment une famille libre pour obtenir une base de $\mathcal{L}_m(\Psi)$. Vérifions que $\Psi(1) = -1$ et $\Psi(x^2) = x^2 - 2x - 1$ forment une famille libre. Soit λ et $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda(-1) + \mu(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (-\lambda + \mu) - 2\mu x + \mu x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda + \mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \text{ car la famille } (1, x, x^2) \text{ est libre}$$

$$\Rightarrow \mu = \lambda = 0$$

Donc la famille $(-1, x^2 - 2x - 1)$ est une base de $\mathcal{L}_m(\Psi)$.