Exercice 23

a) Montrons que P est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

On commence par vérifier que $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$, à savoir la fonction nulle $x \mapsto 0$, appartient à P :

$0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(-x) = 0 = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x)$. On a bien $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in P$

On vérifie ensuite que P est stable par multiplicaton avec un scalaire et par addition :

Soit $f, g \in P$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(\lambda f + g)(-x) &= \lambda f(-x) + g(-x) \\ &= \lambda f(x) + g(x) \quad \text{car } f, g \in P \\ &= (\lambda f + g)(x)\end{aligned}$$

$(\lambda f + g)$ appartient bien à P.

On a ainsi vérifié que P est un sous espace vectoriel.

On procède de même pour I :

$0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(-x) = 0 = -0 = -0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x)$

Soit $f, g \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\lambda f + g)(-x) &= \lambda f(-x) + g(-x) \\ &= -\lambda f(x) + (-g(x)) \quad \text{car } f, g \in I \\ &= -(\lambda f(x) + g(x)) \\ &= -(\lambda f + g)(x)\end{aligned}$$

I est bien un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

b Pour montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$, il faut montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P} + \mathcal{I}$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$

Montrons que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P} + \mathcal{I}$:

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on pose $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

et $i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

On remarque que $f = p + i$ avec $p \in \mathcal{P}$

et $i \in \mathcal{I}$

Ainsi on a bien $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P} + \mathcal{I}$.

Vérifions maintenant que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$

Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$. f vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$2f(-x) = \underbrace{f(x)}_{\text{car } f \in \mathcal{P}} - \underbrace{f(x)}_{\text{car } f \in \mathcal{I}} = 0$. Ainsi $2f(-x) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x)$, $f = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$

c On applique la décomposition proposée dans **b**.

$$e^{x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} + \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \cosh(x) + \sinh(x)$$

Exercice 26

a) Soit $u \in F_1 \cap F_2$, alors u vérifie :

$$u = \underbrace{\begin{pmatrix} t_1 \\ -t_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{car } u \in F_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t_2 \\ -t_2 \end{pmatrix}}_{\text{car } u \in F_2}$$

, avec $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Cette égalité s'écrit par le système suivant :

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ -t_1 = t_2 \\ 0 = -t_2 \end{cases} \Rightarrow t_1 = t_2 = 0. \text{ Ainsi } u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } F_1 \cap F_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

On procède de même, soit $u \in F_2 \cap F_3$ alors

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ t_2 \\ -t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_3 \\ 0 \\ -t_3 \end{pmatrix} \Rightarrow t_2 = t_3 = 0, \ u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ F_2 \cap F_3 = \{0\}$$

Soit $u \in F_1 \cap F_3$,

$$u = \begin{pmatrix} t_1 \\ -t_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_3 \\ 0 \\ -t \end{pmatrix} \Rightarrow t_1 = t_3 = 0, \ u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ F_1 \cap F_3 = \{0\}$$

b Pour savoir si la somme $G + F_3$ est directe, il faut vérifier si $G \cap F_3 = \{0\}$. On va procéder par disjonction de cas.

Soit $u \in G \cap F_3$. Vu que $G = F_1 \oplus F_2$ et que $u \in G$:

- Soit $u \in F_1$. Mais on a aussi que $u \in F_3$, or $F_1 \cap F_3 = \{0\}$ alors $u = 0$
- Soit $u \in F_2$. " , or $F_2 \cap F_3 = \{0\}$ alors $u = 0$.

Dans tous les cas, $u = 0$ donc $G \cap F_3 = \{0\}$ et la somme $G + F_3$ est directe.

Exercice 27

On va commencer par montrer que $F \cap G = \{0\}$.
Le théorème de Grassmann nous dira alors que
$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F\cap G)$$
$$= 1 + 2 - 0 = 3.$$
On aura au final bien que $E = G \oplus F$.

Pour montrer que $F\cap G = \{0\}$, on procède par l'absurde.
Soit $u \in F\cap G$, $u \neq 0$. En particulier $u \in F$ et F est de dimension 1, donc $F = \text{vect}(u)$.
Or on a aussi que $u \in G$. Il existe alors $v \in G$ tel que $G = \text{Vect}(u, v)$. Cela implique que F est inclu dans G, ce qui est faux par hypothèse.
Ainsi forcément $u = 0$ et $G \cap F = \{0\}$.