# III.2.3 (des Suites Récurrentes Linéaires)

30/03
Africay
ALGÈBRE 2

$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ u_n \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ e.v. (comme toutes ensembles des fonction $f: A \to \mathbb{R}$ ; ici $A = \mathbb{N}$)

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\underline{a} \equiv (a_0, a_1, \dots, a_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$.

$F \equiv F_{\underline{a}} := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u_{n+N} + a_{N-1} \cdot u_{n+N-1} + \dots + a_1 \cdot u_{n+1} + a_0 \cdot u_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$

**Thm:** 1) $F \subset E$ (sev)
2) $\dim F = N$

**Rq:** $(u_n) \in F$ est appelée une suite récurrente à l'ordre $N$

**Exples.** $N=1$ : $u_{n+1} = q \cdot u_n$ $(q \equiv -a_0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$
(sol. $u_n = A \cdot q^n$, suite géométrique).
$N = 2$. $u_{n+2} + p \cdot u_{n+1} + q \cdot u_n = 0$ $(p \equiv a_1, q \equiv a_0)$
(cf. Analyse 2 II.5.4!)

**Preuve:**

1) (pour $N=2$, $N$ générale similaire)
$\Psi : E \to E$, $(u_n) \longmapsto (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
réc: $v_n = u_{n+2} + p \cdot u_{n+1} + q \cdot u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
évidement $\Psi \in \mathrm{End}(E) \equiv \mathcal{L}(E,E)$ (← Vérifier-le!)
$F = \mathrm{Ker}\,\Psi$ □.

2) $\varphi : F \to \mathbb{R}^N$, $(u_n) \longmapsto (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$ ⇒ Par réc. toutes les $u_n = 0$.
$\varphi$ est linéaire, càd $\varphi \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R}^N)$
$\varphi$ est un isomorphisme
$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_F\} \Rightarrow \varphi$ est bijective (alors $\varphi$ inject.)
alors $\varphi : F \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N$ ← dim $N$
Notation isomorphisme! dim $F = N$ □.

**Rq:** On aurait pu démontrer la partie 1) ds. II à peu près similairement.
Par contre, l'isomorphisme $\varphi$ est très utile (→ III)

**Corollaire:** $F = \mathrm{Vect}\left(\varphi^{-1}(e_1), \varphi^{-1}(e_2), \dots, \varphi^{-1}(e_N)\right)$ $\quad e_1 \equiv \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2 \equiv \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\end{pmatrix}$ base canonique de $\mathbb{R}^N$

**Rq:** En Analyse on a trouvé des bases pour $N=2$

**Rappel:** $P(X) = X^2 + pX + q$,
si $\Delta > 0$ et $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ses racines alors $F = \mathrm{Vect}\left((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$
si $\Delta = 0$ $r \equiv r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ $F = \mathrm{Vect}\left((r^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n \cdot r^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$
si $\Delta < 0$ $r_1 = a+ib$, $r_2 = \overline{r_1} = a-ib$ $\longrightarrow$ $F \subseteq \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right) =: V$
↳ le sev t.q. $\overline{F} = F$ le sev réel de $V$

Cf. les solutions des éqs. diff. lin. de 2ème ordre à coeff. cst. $\} = \mathrm{Ker}(\Psi)$ (de II.2.2)
→ $\Psi : C^2(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$,
$y \longmapsto y'' + p \cdot y' + q \cdot y$

Pour le même polynôme $P$ ($\hat{m}$ notation)
$\Delta > 0$ : $\mathrm{Ker}(\Psi) = \mathrm{Vect}\left(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\right)$
↳ plus exactement $x \mapsto e^{r_1 \cdot x}$

$\Delta = 0$ : $\mathrm{Ker}(\Psi) = \mathrm{Vect}\left(e^{rx}, x \cdot e^{rx}\right)$
$\Delta < 0$ : $\mathrm{Ker}(\Psi) \subseteq \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\right)$ le sev réel $\mathrm{Ker}(\Psi) = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Re}\left(e^{(a+ib)x}\right), \mathrm{Im}\left(e^{(a+ib)x}\right)\right) \equiv \mathrm{Vect}\left(e^{ax}\cos(bx), e^{ax} \cdot \sin(bx)\right)$ (Sur $\mathbb{R}$)

**Rq:** Cette similarité entre des problèmes assez différents est une des raisons pour l'abstraction d'introduire les espaces vectoriels !

# III.3 Thm du rang et les solutions des éqs. linéaires

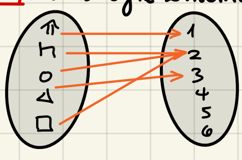
**Déf:** Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appele $r := \dim(\mathrm{im}(f))$ le rang de $f$.

**Rappel:** $\mathrm{Ker}\, f \subseteq E$, $\mathrm{im}\, f \subseteq F$

**Thm:** Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors
1) $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{im}(f))$
2) si en plus $\dim(E) = n \in \mathbb{N}$, alors $\boxed{r = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}\, f)}$

**Rq 1):** reste vraie pour $\dim(E) = \infty$ et/ou $\dim(F) = \infty$

**Rq 2):** analogie ensembles finis:



$|\mathrm{Im}(f)| = |A| - \dots$
exercice!

**Preuve:** Soient $(u_1, \dots, u_k)$ une base de $\operatorname{Ker} f \subseteq E$ et $(w_1, \dots, w_r)$ une base de $\operatorname{im}(f) \subseteq F$ $\forall i \in [1,..,r]$
$\exists v_i \in E$ t.q. $f(v_i) = w_i$ (car $w_i \in \operatorname{im}(f)$).
Prenons $F := (u_1, .., u_k, v_1, \dots, v_r) \in E^{k+r}$

**Lemme:** F est une base de E  **Corollaire:** $\dim(E) = k+r$ (qui montre le thm)

**Preuve du Lemme:**

1) F est libre: $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot u_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j \cdot v_j = 0$ / on applique $f$ à cette éq. (*)

$\boxed{(*) \text{ car } u_i \in \operatorname{Ker} f}$

$$\Rightarrow 0 = f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{r} (\mu_j \cdot v_i)\right) \overset{f \text{ lin.}}{=} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underbrace{f(u_i)}_{0^{(*)}} + \sum_{j=1}^{r} \mu_j \overbrace{f(v_j)}^{w_j} \iff \sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j = 0$$

$(w_1, \dots, w_r)$ une base de $\operatorname{im}(f) \subseteq F$, alors libre ds F, alors $\mu_j = 0$ $\forall j = 1, \dots, r$
$\Rightarrow$ (*) implique déjà $\boxed{\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r = 0}$ alors $(*) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0$
mais $(u_i, \dots, u_k) \in E^k$ est une base de $\operatorname{Ker}(f) \subseteq E$ alors libre aussi $\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0}$. Alors F est libre.

2) F est génératrice: $\forall x \in E$, on pose $w = f(x)$ alors $w \in \operatorname{im}(f)$
alors $\exists(!)\ (\mu_1, \dots, \mu_r) \in \mathbb{R}^r$ t.q. $w = \sum_{j=1}^{r} \mu_i \cdot w_j$, regardons $u := x - \sum_{j=1}^{r} \mu_i \cdot v_j$ (pour les v ci-dessous).
Alors F est génératrice □.

---

## III.4 Des applications linéaires et leur matrices

**Corollaire:** Soit $f \in \operatorname{End}(E)$. $\left.\begin{matrix}\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{im}(f) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{im} f \\ \operatorname{Ker} \oplus \operatorname{im} f = E\end{matrix}\right\} \iff \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$

**Preuve:** Utiliser le Thm du rang et de Grassmann (à vous!)

**Exple:** $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto A \cdot x$

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; on trouve (Gauss! c.f. CM1) $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow \operatorname{im}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Thm du rang
$r = 3 - \underbrace{1}_{\dim \operatorname{Ker}} = 2$

ici $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{im} f = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ (à vous)

Alors ici $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{im}(f)$

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}(e_1)$  alors ici $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{im}(f)$
$\operatorname{im} f = \operatorname{im} A = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$  et $\operatorname{Ker} f + \operatorname{im}(f) \subsetneq \mathbb{R}^3$

**Prop:** Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ une base de E. Si l'on connait $f(b_i) \in F$ $\forall i = 1, \dots, n$, on connait toute l'application $f$.

**Preuve:** $\forall x \in E$ $\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \equiv (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ t.q. $x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$
$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right) \overset{f \text{ lin!}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(b_i)$ □.

**Exs:**

1) $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}) \Longrightarrow f(x) = A \cdot x$ où $A = f(1) \in \mathbb{R} \cong \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$
2) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -x + 2y \\ 5x - 7y \end{pmatrix} \equiv A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$
$f(e_1) \equiv f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \equiv f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$
$f(e_2) \equiv f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \equiv f(0,1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$
3) Plus généralement
$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $x \mapsto A \cdot x$ pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
Alors $\boxed{A = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))}$

**Corollaire:** Soit $\mathcal{B} := (b_1, \dots, b_n)$ une base de $E$.
Alors $\varphi_{\mathcal{B}} \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$ est donné par $\varphi_{\mathcal{B}}(b_i) = e_i \ \forall i = 1, \dots, n$ et $\varphi_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme: $\boxed{\varphi_{\mathcal{B}} : E \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n}$

$\forall x \in E$ et $\varphi_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

**Déf:** Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{B} := (b_1, \dots, b_n)$ une base de $E$ et $\mathcal{C} := (c_1, \dots, c_m)$ une base de $F$.
Alors on défini une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par $\forall i = 1, \dots, n$:

$\forall i = 1, \dots, n \ : \ \underset{\overset{\cap}{F}}{f(b_i)} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{A_{ji}} c_j \ . \quad (A)_{ij} := A_{ij}$

(des coefficients uniques (ds $\mathbb{K}$) car $\mathcal{C}$ une base).

On écrit aussi
$A \equiv [f]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$