## II.3.3 Des autres exemples importants

1. Les suites récurrentes linéaires
2. Les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène

} on va les discuter ds le chap. III, en utilisant la notion d'un app. lin. (ça evite des preuves repétitives, etc).

# III. DES APPLICATIONS LINÉAIRES

## III.1 Déf & Exples.

Rq: On appelle une fonction $f: A \longrightarrow B$ des ensembles une application ssi $D_f = A$.

**Déf:** Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f: E \to F$ une application linéaire. si $f$ est une application t.q. $\forall x, \tilde{x} \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

$$\boxed{f(x+\lambda\tilde{x}) = f(x) + \lambda f(\tilde{x})} \quad (*)$$

**Rq:**

1) $(*) \begin{cases} \forall x, \tilde{x} \in E: & f(x+\tilde{x}) = f(x) + f(\tilde{x}) \\ \forall x \in E, \lambda \in \mathbb{K}: & f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x) \end{cases}$

2) $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

**Exples.**

① $f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m, \quad x \mapsto A \cdot x$
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

à cause de la cote

② $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3x+1$ Pas une appl. lin. ⚠

$f(2+3) = f(5) = 16$
$\neq$
$f(2) + f(3) = (6+\underline{1}) + (9+\underline{1}) = 17$

③ $\Psi: C^n(I, \mathbb{R}) \to C^{n-1}(I, \mathbb{R}), \quad f \mapsto 3 \cdot f'$
$n \in \mathbb{N}^*$
$I$ int ouverte

car $\forall f, \tilde{f} \in C^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\Psi(f+\lambda\tilde{f})} \overset{\text{Déf}}{=} 3 \cdot (f+\lambda\tilde{f})' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{les plts montrés en analyse}}}{=} 3(f' + \lambda \tilde{f}') = \overset{\Psi(f)}{3f'} + \lambda \cdot \overset{\Psi(\tilde{f})}{3\tilde{f}'} = \boxed{\Psi(f) + \lambda \Psi(\tilde{f})}$$

④ 4.1 $\Psi: C^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto 2f(a)$
Soit $a \in \mathbb{R}$ $\quad \Psi(f+\lambda\tilde{f}) = 2(f+\lambda\tilde{f})(a) = 2f(a) + \lambda \cdot 2\tilde{f}(a) = \Psi(f) + \lambda\Psi(\tilde{f})$

4.2 $\Psi: C^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f \mapsto \begin{pmatrix} 3f(a) & 2f(b) \\ 2f(c) & -7f(d) \end{pmatrix}$ car... à vous!
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$

⑤ $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A \mapsto A + A^T$

**Lemme:** motivé par l'exple 2: (une fonct. de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui n'est pas lin.)
Toutes les appl. linéaires $f$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont de la forme $f(x) = a \cdot x$ pour un $a \in \mathbb{R}$.

**Preuve:** $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$
$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$
$x := 1 \quad \Rightarrow f(\lambda) = f(1) \cdot \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
changem^t de notation
alors $\forall x \in \mathbb{R}: \ f(x) = f(1) \cdot x \qquad \boxed{a := f(1)}$

**Thrm:** Toutes les applications linéaires $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sont de la forme $f(x) = Ax$ pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

**Preuve:**
$\Leftarrow$) l'exple ① (déjà démontré au ch. II)
$\Rightarrow$) plus tard! pour $n=m=1$ ci-dessus.
(appl. lin $\Rightarrow \exists A$ t.q.)

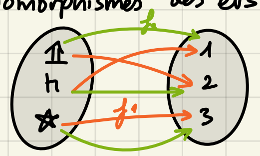
**Rq:** Le lemme ci-dessous est le cas spécial du Thm pour $n = m = 1$.
On remarque que ds ce cas $A \equiv a = f(1)$ et 1 une base de $\mathbb{R}$.

**Déf:**
- $\{f : E \to F \text{ lin}\} =: \mathcal{L}(E,F)$
- $f \in (E,F)$ est appelé un morphisme de E vers F.
- End $(E) := \mathcal{L}(E,E)$ et on appelle un $f \in$ End $(E)$ un endomorphisme. (de E).
- $f \in \mathcal{L}(E,F)$ t.q. $f$ est bijective est appelé un isomorphisme. (Notation : $f : E \xrightarrow{\sim} F$) "iso"
- Aut $(E) := \{f \in \text{End}(E) \text{ et } f \text{ iso}\}$ et on appelle un $f \in$ Aut $(E)$ un automorphisme (de E).
- E et F sont appelés isomorphismes s'il $\exists f : E \xrightarrow{\sim} F$ et on écrit $\boxed{E \cong F}$

**Rq's:**

⚠

1) $\left.f : E \xrightarrow{\sim} F \Rightarrow f^{-1} : F \to E \text{ est linéaire alors } f^{-1} : F \xrightarrow{\sim} E\right\}$ $f$ iso $\Rightarrow f^{-1}$ iso
2) les isomorphismes permettent d'identifier des $f : E \xrightarrow{\sim} F$ evs E et F. Ici E et F peuvent être très diff.
(exple: $\mathbb{R}_n[X] \cong \mathbb{R}^{n+1}$, plus généralement si $\dim_{\mathbb{K}} E = n \Longrightarrow E \cong \mathbb{K}^n$ preuve plus tard) ou
$F = E$ ($\Rightarrow \exists f$ auto) - ds ce cas sa permet de simplifier un $g \in$ End $(E)$.
3) les isomorphismes des evs E et F sont pas uniques, les comparer avec des bijections entre deux ensembles,




$f$ E et $\mathbb{K}^n$

alors $\dim E = n$

# III.2 Ker(f) et im(f)

## III.2.1 Déf et Sev:

**Déf:** Soit $f : E \to F$ une appl. lin.
1) $\text{Ker } f \equiv \text{Ker}(f) := \{x \in E \mid f(x) = 0 \equiv 0_F\}$
2) $\text{im } f \equiv \text{im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E \text{ t.q. } f(x) = y\}$

la déf hab. pour l'image d'une application

**Rq:** Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto A \cdot x$
$\text{Ker } f = \text{Ker } A$ et $\text{im } f = \text{im } A$

**Thrm:** Soit $f : E \to F$ une appl. lin.
1) $\text{Ker } f \subseteq E$ (sev)
2) $\text{im } f \subseteq F$ (sev)

**Preuve:** 1) $\forall x, \tilde{x} \in \text{Ker } f$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.
$$f(x + \lambda\tilde{x}) = \underbrace{f(x)}_{0} + \lambda \cdot \underbrace{f(\tilde{x})}_{0} = 0 \Rightarrow x + \lambda\tilde{x} \in \text{Ker } f \quad \square.$$
car $f$ lin

car $x \in \text{Ker } f$

" $0_E$ et $0_F$ $\in$ l'espace "

2) $\boxed{\forall y, \tilde{y} \in \text{im } f, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}}$

$y \in \text{im } f \Rightarrow \exists x$ t.q. $f(x) = y$
$\tilde{y} \in \text{im } f \Rightarrow \exists \tilde{x}$ t.q. $f(\tilde{x})$ $\tilde{y}$

## III.2.2 Les solutions des équations différentielles linéaires homogènes:

Soit $\boxed{\mathcal{E} := \{f \in C^n(I) \mid f^{(n)} + a_{n-1} \cdot f^{(n-1)} + \ldots + a_2 \cdot f'' + a_1 \cdot f' + a_0 \cdot f = 0\}}$ l'ensemble des solutions d'une éq. diff. lin. d'ordre n.

$n, N \in \mathbb{N}^*$ I intervalle ouverte et $a_0, \ldots, a_{n-1} \in C^0(I)$

**Thrm:** 1) $\mathcal{E} \subseteq C^n(I)$ (sev)
2) $\dim(\mathcal{E}) = n$

**Preuve:** de 1)
On définit $\Psi : C^n(I) \to C^0(I)$, $f \mapsto f^{(n)} + a_{n-1} \cdot f^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot f' + a_0 \cdot f$
Alors on voit que $\mathcal{E} = \text{Ker}(\Psi)$ $\square$.

**Rq:** Preuve de 2) surpasse notre cours ici, mais c'est extrement important en pratique

**Corollaire 1:** Les solutions de $\boxed{y'+a\cdot y=0}$ $(a\in C^0(I))$ forment un ev. dim 1.

**Rappel:** En Analyse on avait un thm que $y'+a\cdot y=0 \iff \exists\, C\in\mathbb{R}$ t.q. $y=C\cdot\exp(-A(x))$ pour un A t.q. $A'=a$.
On a seulement démontré en Analyse que $y=\exp(-A)$ est <u>une</u> solution de $y'+a\cdot y=0$,
avec le corollaire on a que $\exp(-A)$ forme une base de $\mathcal{E}=\{y\in C^1 \mid y'+a\cdot y=0\}$ qui montre le reste.

**Corollaire 2:** Les solutions de $\underbrace{\boxed{y''+py'+qy=0}}_{⊛}$ $p,q\in\mathbb{R}$, forment un ev de dim 2

Par conséquence, si l'on trouve des solutions $f_1$ et $f_2$ de ⊛ t.q $f_2\neq 0$ et $\nexists\,\alpha\in\mathbb{R}$ t.q. $f_1=\alpha\cdot f_2$ ($\iff \forall x\in I,$ $f_1(x)\neq\alpha\cdot f_2(x)$).
la fonct° nulle
On a <u>une base</u> des solutions de ⊛,
alors y satisfont ⊛ $\iff \exists\, A,B\in\mathbb{R}$, t.q. $y=A\cdot f_1+B\cdot f_2$

**Exple:** (Exercice II.9) $f_1$ et $f_2$ t.q. $f_1(x)=\sin(2x)$ et $f_2(x)=\cos(2x)$ forment une base pour l'esp. vect. des solutions de $y''+4y=0$ (□), alors y satisfait (□) $\iff \exists\, A,B\in\mathbb{R}$ t.q. $y(x)=A\sin(2x)+B\cdot\cos(2x)$.

> **Rq:** $f_1=\overset{\text{composé}}{\sin\circ g}$ où $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto 2x$
> $f_2=\cos\circ g$
> $y=A\cdot f_1+B\cdot f_2 \equiv A(\sin\circ g)+B(\cos\circ g)$

**Déf:** On appelle $\mathcal{F}=(f_1,\dots,f_n)$ qui est une base de $\mathcal{E}$ un système fondamentale de ⊛

> **Rq:** Si $\mathcal{F}=(f_1,\dots,f_n)$ est un système fondamentale, alors $y\in\mathcal{E}\iff\exists\,(C_1,\dots,C_n)\in\mathbb{R}^n$ t.q. $y=\sum_{i=1}^{n}C_i f_i$.

**Aperçu - des solutions Particulières et Générales:**
Soit $f:E\to F$ et $b\in F$, alors pour résoudre $f(x)=b$ on fait comme ça.

> **Rq:** Si $b\neq 0$ alors l'ensemble $A=\{x\in E \mid f(x)=b\}$ n'est pas un esp. vect (car $0_E\notin A$).
>
> Soit $x_0\in A$, alors $x=x_0\in E$ est une solution de $f(x)=b$,
> alors $x\in A\iff \underset{\text{la solut° générale}}{x}=\underset{\text{une sol. particulière}}{x_0}+\underset{\text{la solution générale du pb. homogène}}{x_{hom}}$ où $x_{hom}\in\operatorname{Ker}(f)$

**Preuve:** Soit $x_1$ et $x_2\in A$
alors $f(x_1)=b$ et $f(x_2)=b$
$\Rightarrow f(x_1-x_2)=f(x_1)-f(x_2)=b-b=0$
alors la différence de deux solutions est ds $\operatorname{Ker}(f)$.