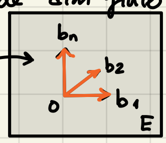
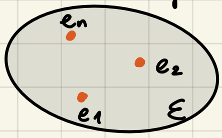
16/03 Africey ALGÈBRE 2

Rq: Similarity / Analogie

esp. vects. de dim finie	ensembles de cardinalité finie
	

m̂ si c'est un ensemble dénombrable

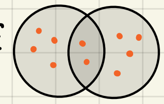
Exple:

Thm: de Grassmann $\overset{\sim}{\longleftrightarrow}$

Soient $F, G \subseteq E$ de dim. fin.

alors $\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)}$

somme directe $\Longleftarrow$ ✱



$|\mathcal{E}\cup\tilde{\mathcal{E}}| = |\mathcal{E}| + |\tilde{\mathcal{E}}| - |\mathcal{E}\cap\tilde{\mathcal{E}}|$

Idée de Preuve du Thm.

On utilise que chaque famille libre dans un esp. vect. peut être complementé à une base (et que chaque e.v. a une base).

"Lemme de Steinitz"

Soit $\dim F = m$, $\dim G = n$, $\dim F\cap G = k$

$F\cap G$ - e.v. $\Rightarrow \exists$ base $(u_1,\dots,u_k)$

$F\cap G \subseteq F \to$ je peux compl. ↑ à une base de F $(u_1,\dots,u_k, v_1,\dots,v_{m-k})$

$F\cap G \subseteq G \to (u_1,\dots,u_k, w_1,\dots,w_{n-k})$

$\to (u_1,\dots,u_k, v_1,\dots,v_{m-k}, w_1,\dots,w_{n-k}) \leftarrow$ une base de $F+G$

$\Rightarrow \dim(F+G) = k + (m-k) + (n-k) = m+n-k$ □.

Corollaire: Soit $F+G \subseteq E$ sev.

1) $F+G = F\oplus G$ (✱ $F+G$ est une somme directe) $\iff \dim(F+G) = \dim F + \dim G$

2) $\boxed{\dim(F\oplus G) = \dim F + \dim G}$

(alors si $F+G = F\oplus G$)

Preuve 1): $F+G = F\oplus G$ $\overset{\text{Déf}}{\iff}$ $F\cap G = \{0_E\}$ ($\in E$)

$\Updownarrow$

$\dim(F\cap G) = 0$ ($\in \mathbb{N}$) □.

Notation: p.e. si $k=3$, $F_1+F_2+F_3 = F_1\oplus F_2\oplus F_3 \iff F_1\cap(F_2+F_3) = \{0\}$ et $F_2\cap(F_1+F_3) = \{0\}$ et $F_3\cap(F_1+F_2) = \{0\}$

Prop: (sans preuve / ou déf. alternative):

Soient $F_1,\dots,F_k \subseteq E$, Alors:

"on prend la somme de tous, sauf"

1) $F_1+F_2+\dots+F_k = F_1\oplus F_2\oplus\dots\oplus F_k \iff F_i\cap(F_1+F_2+\dots+\widehat{F_i}+\dots+F_k) = \{0_E\}$

2) $F_1+F_2+\dots+F_k = F_1\oplus F_2\oplus\dots\oplus F_k \iff (\forall x\in F_1+\dots+F_k \Rightarrow \exists!\ v_1\in F_1, v_2\in F_2,\dots,v_k\in F_k$ t.q. $x = v_1+v_2+\dots+v_k)$

Rq: $\mathcal{F} = (b_1,\dots,b_n)$ une base de E $\Rightarrow E = \mathrm{Vect}(b_1)\oplus\mathrm{Vect}(b_2)\oplus\dots\oplus\mathrm{Vect}(b_n)$

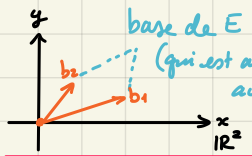
car $\mathcal{F}$ est une base / cad aussi libre.

II.3 Quelques sevs importants

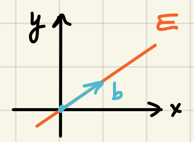
II.3.1 Tous les sevs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

- $\mathbb{R}^2$, Soit $E\subseteq\mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim(E)\in\{0,1,2\}$
  - l'origine — cas 1: $\dim(E) = 0 \iff E = \{0_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}$
  - plan — cas 2: $\dim(E) = 2$
    $\exists(b_1,b_2)$ une base de E
    càd $E = \mathrm{Vect}(b_1,b_2) = \mathbb{R}^2$
    alors $\dim(E) = 2 \iff E = \mathbb{R}^2$

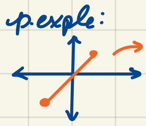
Motivat° geométrique cas 2



cas 3



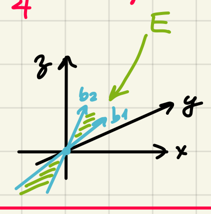
p.exple:



  - droite — cas 3. $\dim(E) = 1 \Rightarrow \exists b\in E\subset\mathbb{R}^2$ t.q. $E = \mathrm{Vect}(b) = \{\lambda\cdot b,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$
    $\{E\subseteq\mathbb{R}^2, \dim E = 1\} \cong \{$droite ds $\mathbb{R}^2$ passant par l'origine$\}$

- $\mathbb{R}^3$, Soit $E\subseteq\mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim(E)\in\{0,1,2,3\}$
  - cas 1: $\dim(E) = 0 \iff E = \{0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}$
  - cas 2: $\dim(E) = 3$
    $\exists(b_1,b_2,b_3)$ une base de E
    càd $E = \mathrm{Vect}(b_1,b_2,b_3) = \mathbb{R}^3$
    alors $\dim(E) = 3 \iff E = \mathbb{R}^3$
  - cas 3. $\dim(E) = 1 \Rightarrow \exists b\in E\subset\mathbb{R}^3$ t.q. $E = \mathrm{Vect}(b) = \{\lambda\cdot b,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$
    $\{E\subseteq\mathbb{R}^3, \dim E = 1\} \cong \{$droite ds $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine$\}$
  - cas 4: $\dim(E) = 2$ $\exists a, b$ une base de E
    càd $E = \mathrm{Vect}(b_1,b_2) = \{\lambda_1\cdot b_1 + \lambda_2\cdot b_2,\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\}$ $\{E\subseteq\mathbb{R}^3, \dim E = 2\} \cong \{$plan ds $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine$\}$

Motivat° geométrique cas 4



II.3.2 Ker A et im A et comment en trouver des bases.

Les applications linéaires-version préliminaire 2.

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$. On peut déf. une appl. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto A \cdot x$
(qui satisfait $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda \cdot f(y)$ $\longleftrightarrow$ caractérisation d'une appl. lin).

- **Rappel:** $\text{Ker } A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0\} \overset{\text{ici}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\} =: \text{Ker}(f)$ le noyau
- $\text{im}(A) \equiv \text{im } A := \text{im}(f) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : y = f(x)\}$
  par déf. d'une image d'une fonction f.

alors $\text{im } A = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : y = A \cdot x\}$

Rq: • $\text{Ker } A \subseteq \mathbb{R}^n$ ← déjà demontré
• $\text{im } A \subseteq \mathbb{R}^m$ → cf ci-dessous

Rappel: $A \cdot x = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot x_1 + A_{12} x_2 + \dots \\ A_{21} x_1 + \dots \\ \vdots \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \langle u_1 | x \rangle \\ \langle u_2 | x \rangle \\ \vdots \\ \langle u_m | x \rangle \end{pmatrix} = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$

où $x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$; $\underbrace{v_1 \; x_1}_{x_1 \cdot v_1}$, v_2, x_2

↕ Bien pour calculer im A ; Gauss sur les colonnes

où $v_i \in \mathbb{R}^m$ est la $i^{\text{ème}}$ colonne de A

$A = (v_1, v_2, \dots v_n)$

Bien pour calc. Ker A → Gauss lignes

$A = \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_m^T \end{pmatrix}$ $u_i \in \mathbb{R}^n$ ... vecteurs de ligne de la matrice A

(**Rappel:** $\langle a | b \rangle \overset{\text{Déf.}}{\equiv} \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$)

alors $\boxed{\text{im}(A) = \{\lambda_i \cdot v_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\} \overset{\text{Déf.}}{=} \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)}$ ⚠

← vecteurs de colone de A.

(car $A \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$)

$\boxed{\text{im}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : y = A \cdot x\}}$

Corollaire: $\text{im } A \subseteq \mathbb{R}^m$ (sev)

On a défini le rang $r \equiv \text{rg}(A)$ d'une matrice A par le nombre r de lignes non-nulles de A après Gauss sur les lignes.

Sans preuve: $\boxed{\text{rg } A = \text{rg}(A^T)}$ ⇝ $\boxed{r \equiv \text{rg}(A) = \dim(\text{im } A)}$ ⚠

Exple: ⚠ → Examen!

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer Ker A avec une base,
et im A avec une base.

i)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -4 \\ -7 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \backslash(-\frac{1}{3}) \\ -2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Pour plus tard...

$\boxed{\text{rg}(A) \equiv r = 2}$ (**)

ii)

$x_3 = \lambda$, $x_4 = \mu$ des paramètres

$x_2 + 2\lambda + \mu = 0 \Rightarrow x_2 = -2\lambda - \mu$

$x_1 + 2(-2\lambda - \mu) + 3\lambda + \mu = 0 \Rightarrow x_1 = \lambda + \mu$

$\Longleftrightarrow \boxed{x = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$ (*)

alors $x \in \text{Ker } A \equiv \{x \mid A \cdot x = 0\}$
$\Longleftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$ t.q. (*)

iii) Ker A

$\text{Ker } A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \equiv \left\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ ← la forme paramétrique d'un plan (de dim 2) ds $\mathbb{R}^4$

une base de Ker A ($\Rightarrow \dim(\text{Ker } A) = 2$)

iv) im A

- Méthode 1

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 & -3 \\ 7 & -6 & -12 & -6 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \end{matrix}$$

-2, -3, -1 ; -2, -1 ; $\left(-\frac{1}{3}\right)$

Gauss colonne ne change im A.

Rq: $\text{im } A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ (* * *)

c'est correct, mais seulement génératrice, pas une base!

$$\boxed{\text{im } A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right) \Longrightarrow (\text{rg } A = \dim(\text{im } A) = 2)}$$

- Méthode 2 (plus rapide!)

(* *) + (* * *) $\Longrightarrow$ deux vecteurs de colone non-colinéaire forment une base de im A.

p.e. $\boxed{\text{im}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)}$

une autre base mais aussi une base ✓

$$\boxed{\text{im } A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right) \longleftarrow \text{forme paramétrique d'un plan } p \subset \mathbb{R}^3}$$

forme cartésienne de p:

- meth. 1

$$\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$1\cdot 0 = 1$
$2\cdot 0 = 2 \to -2$
$8-7=1$

seulement ds $\mathbb{R}^3$ (avec le prod. vectoriel!)

$$\{p = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$

- meth. 2 : géniale

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 4 & 1 & y \\ 7 & 2 & z \end{vmatrix} = 0$$

$$x\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = x - 2y + z$$