Rappel:
$\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs dans un espace vectoriel E, càd $u_i \in E$ $\forall i = 1, \dots, n$
$\mathcal{F}$ est génératrice ssi $\forall x \in E$ $\exists \lambda_i \in \mathbb{K}$, $\forall i = 1, \dots, n$ t.q. $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$
$\mathcal{F}$ est libre ssi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$. $\mathcal{F}$ est une base ssi $\mathcal{F}$ est libre et génératrice au même temps.

Prop: $\mathcal{F}$ est une base $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in E$ $\exists! \lambda_i \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \dots, n)$ t.q. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$

Preuve:
$\Leftarrow$) génératrice ✓, $x := 0 \Rightarrow \exists! \lambda_i \in \mathbb{K}$ t.q. $\overbrace{0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i}^{*}$, $\lambda_i = 0$ une solution pour $*$ évidente, la seule $\Rightarrow$ libre ✓.
$\Rightarrow$) existance de λ_i car $\mathcal{F}$ génératrice
mais les u_i sont aussi uniques : Preuve par l'absurde:

$$-\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \\ x = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i \cdot u_i \end{cases}$$
$$0 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\lambda_i - \tilde{\lambda}_i)}_{\mu_i}$$

$\mathcal{F}$ libre $\Rightarrow \mu_i = 0$ $\forall i = 1, \dots, n$
$\Downarrow$
$\lambda_i = \tilde{\lambda}_i$ ↯

Exples des bases:
1) $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{F}_1 = (e_1, e_2)$ où $e_1 \equiv \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 \equiv \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est une base,
car $\forall x \equiv \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x = x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2$ — et les coefficients x_1, x_2 sont uniques.
ou car, est génératrice et libre (exercice).

- mais aussi $\mathcal{F}_2 := \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$, forment une base. Pourquoi?
  i) libre $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 + \lambda_2\\ \lambda_1 - \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0\end{cases} +$
  $2\lambda_1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\lambda_1 = 0$ ✓

  ii) génératrice : $\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}$; $\exists?$ λ_1, λ_2 t.q.
  $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\lambda_2\\ -\lambda_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 + \lambda_2\\ \lambda_1 - \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}}_{\Delta} \Longleftrightarrow + \begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 = x_1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = x_2\end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$
  et $\lambda_2 = x_1 - \lambda_1 = x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_1 - x_2}{2}$ ✓

Rq's:
1) Avec la prop. ci-dessous il n'est pas nécessaire de démontrer "libre" : λ_1 et λ_2 sont fixés de façon unique par $x \in \mathbb{R}^2$ $\left(\lambda_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \lambda_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}\right)$

2) $(\Delta) \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}}_{\text{une matrice } 2\times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}}_{\text{cherché}} = \underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}}_{\text{donné}}$ On a une solution unique $\left(\text{pour } \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}\right) \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix}}_{-2} \neq 0$ ✓

C'est évident la façon la plus courte ici pour démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre.
On généralise pour n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$.

Prop: $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une base ds $\mathbb{R}^n \Longleftrightarrow \det((u_1, \dots, u_n)) \neq 0$

Preuve: $\mathcal{F}$ est une base $\overset{\text{Prop ci-dessus}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists! \lambda_i$, $\forall x \in \mathbb{R}$, t.q. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i = x \equiv \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n \cdot u_n \equiv \lambda_1 \begin{pmatrix}u_{11}\\u_{21}\\ \vdots \\ u_{n1}\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}u_{12}\\ \vdots \\ u_{n2}\end{pmatrix} + \dots \equiv \begin{pmatrix}u_{11} \cdot \lambda_1 + u_{12} \cdot \lambda_2 + \dots + u_{1n} \cdot \lambda_n \\ u_{21} \cdot \lambda_1 + u_{22} \cdot \lambda_2 + \dots \\ \vdots \\ u_{n1} \cdot \lambda_1 + \dots + u_{nn} \cdot \lambda_n\end{pmatrix} \equiv$$

$\forall i = 1, \dots, n.$ $u_i = \begin{pmatrix}u_{1i}\\u_{2i}\\ \vdots \\ u_{ni}\end{pmatrix}$

$$\equiv \begin{pmatrix}u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n}\\ u_{21} & u_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ u_{n1} & \cdots & \cdots & u_{nn}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = A \cdot \lambda \quad \text{où } A = (\quad \lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \equiv \underline{\underline{A \cdot \lambda \overset{!}{=} x}}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\exists$ une sol. unique $\Longleftrightarrow A^{-1} \exists$ $\Longleftrightarrow$ det $A \neq 0$ $\square$.

Exple: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\7\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ forment une base ssi (Prop.)

$\underbrace{\begin{vmatrix}1&4&1\\2&7&1\\3&8&1\end{vmatrix}}$ est non-nul alors ici une base.

$1\begin{vmatrix}2&7\\3&8\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1&4\\3&8\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}1&4\\2&7\end{vmatrix} = -5+4-1 = -2 \neq 0$

Par contre, $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ne forment une base car

$\begin{vmatrix}1&4&1\\2&5&1\\3&6&1\end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix}2&5\\3&6\end{vmatrix}}_{-3} - \underbrace{\underbrace{\begin{vmatrix}1&4\\3&6\end{vmatrix}}_{-6}}_{+6} + \underbrace{\begin{vmatrix}1&4\\2&5\end{vmatrix}}_{-3} = 0$ ✓

Lemme: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. En fait, $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ est une base évidente.

(car $\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = \det(\mathbb{1}_n) = 1$), et elle est appelé la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Rq: Il y a une infinité des bases dans $\mathbb{R}^n$.
(exple. $n=2$: $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right)$ t.q. $\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix} \equiv ad - bc \neq 0$)

Lemme: $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$
En fait, $F := (1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base, la base canonique. ⚠
Pourquoi F est une base?
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\exists! (a_0, a_1, \dots, a_n)$ t.q. $P(X) = a_0 1 + a_1 X + a_2 \cdot X^2 + \dots + a_n \cdot X^n \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i$ n+1

espace vectoriel des matrices

Lemme: $\dim \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = m \cdot n$
Une base pour $\mathcal{M}_{m,n}$ $\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&\ddots&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&1&0&\cdots\\0&&\ddots&\vdots\\&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$, etc.

$F = (\mathcal{M}_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m\\j=1,\dots,n}}$ est une base de $\mathcal{M}_{m,n}$ où $(\mathcal{M}_{i,j})_{k\ell} = \begin{cases}1 & \text{ssi } i=k, j=\ell\\ 0 & \text{autrement}\end{cases}$

pour chaque i,j on a des matrices.

P. exple. $\mathcal{M}_{2,3}$ dans $\mathcal{M}_{3,4}$. $\mathcal{M}_{2,3} \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $\left(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}, \text{ alors } A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A_{ij} M_{ij}\right)$

Exple: $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ une base $\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_{1,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_{1,3}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_{2,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_{2,3}}$

famille de six matrices, que forment une base.

$\forall A \in \mathcal{M}_{2,3}$ alors $A \equiv \begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\end{pmatrix} = A_{11} \cdot \mathcal{M}_{1,1} + A_{12} \cdot \mathcal{M}_{1,2} + \dots + \underbrace{A_{2,3}}_{\in \mathbb{K}} \cdot \underbrace{\mathcal{M}_{2,3}}_{\in \mathcal{M}_{2,3}}$

"On compose la matrice A en combinaison linéaire des autres six matrices".

coefficients uniques ⟹ une base.

• Cardinalité : le nb des éléments, ici, que forment une base.

plus detaillé / illustré :
$A = \begin{pmatrix}0&2&0\\3&0&-1\end{pmatrix} = \cancel{0 \cdot \mathcal{M}_{1,1}} + 2 \cdot \mathcal{M}_{1,2} + \cancel{0 \cdot \mathcal{M}_{1,3}} + 3 \cdot \mathcal{M}_{2,1} + \cancel{0 \cdot \mathcal{M}_{2,2}} - 1 \cdot \mathcal{M}_{2,3}$

$\begin{pmatrix}0&2&0\\3&0&-1\end{pmatrix} = \underbrace{2}_{\in \mathbb{K}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{2,3}} + 3 \cdot \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Rq: $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-esp. vectoriel avec $\dim \mathbb{C}^n = n$
$\mathbb{C}^n$ est aussi un $\mathbb{R}$-esp. vectoriel avec $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$

En tant que $\mathbb{R}$-esp. vectoriel :

$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ← $a+ib \in \mathbb{C}$ $\updownarrow$ 1:1 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
$\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$
$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$

Exple: $\mathbb{C}^2 \ni \begin{pmatrix}a+ib\\c+id\end{pmatrix} = (a+ib) \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (c+id) \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$

$= \underline{a} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \underline{b} \cdot \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix} \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$

do $\mathbb{R}$

Pour décider que n-vecteurs $u_1, \dots, u_n$ de $\mathbb{R}^n$ forment une base on peut utiliser le determinant (cf. Prop. ci-dessus). Pour E plus générale on a (sans preuve):

Prop: Soit E un esp. vect. de dimension n, dim E = n, et soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs dans E. Alors on a :

i) $\mathcal{F}$ est une base
$\Updownarrow$
ii) $\mathcal{F}$ est libre
$\Updownarrow$
iii) $\mathcal{F}$ est génératrice

Alors, si vous connaisez la dim de E (finie) il est suffisant de m.q. soit $\mathcal{F}$ est libre, soit $\mathcal{F}$ génératrice, pour établir les deux ptés au m̂ temps.

Exple: $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{F} = (X^2, X^2+X, X^2+1)$. $\mathcal{F}$ est libre car $\lambda_1 \cdot X^2 + \lambda_2 (X^2+X) + \lambda_3 (X^2+1) = 0 \iff$

ici les vecteurs sont des polynômes

$\iff \underbrace{\lambda_3}_{\overset{!}{=}0} \cdot 1 + \underbrace{\lambda_2}_{\overset{!}{=}0} \cdot X + \underbrace{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}_{\overset{!}{=}0} \cdot X^2 \overset{!}{=} 0$ $\implies \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$ ✓

un polynôme est zèro si toutes ces coefficients sont zèro.

$\mathcal{F}$ est libre $\overset{\text{Prop}}{\implies}$ $\mathcal{F}$ est aussi génératrice, $\boxed{\text{car je suis déjà } \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3}$
$\implies \mathcal{F}$ est une base.

Rq: $\dim C^n([a,b]\ \mathbb{R}) = \infty$ $\nexists$ (il n'existe une base de taille (cardinalité) finie.

Thrm: Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E, E un e.v. Alors :

(1) Si $\mathcal{F}$ est libre on peut trouver d'autres vecteurs dans E pour $\boxed{\text{compléter}}$ à une base.
(p.e. si dim E = n, $\exists V_1, \dots, V_{N-n} \in E$ t.q. $(u_1, \dots, u_N, V_1, \dots, V_{N-n})$ est une base de E).

(2) Si $\mathcal{F}$ est génératrice alors on peut $\boxed{\text{éliminer}}$ des vecteurs pour obtenir une base.
(p.e. si dim E = n, $\exists$ N-n vecteurs parmi $u_1, u_2, \dots, u_N$ qui forment une base de E.

(3) Chaque e.v. E admet une base.

Rq: La dimension d'un e.v E est:

Lemme: 1) le nombre minimal des vecteurs qui sont génératrice.
2) le nombre maximal des vecteurs qui sont libres.

Corollaire: $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_N)$ ds E, dim E = n

si $N > n$ alors $\mathcal{F}$ n'est pas libre.
si $N < n$ —— " —— pas génératrice.