3) En généralisant l'exple 2 · (CM4)
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}$

Déf: $\boxed{\operatorname{Ker} A := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot 0 = 0_{p,m} \}}$ $\left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} m$ lignes

Notation: " Ker A "
On dit noyau de A.
(en anglais Kernel)

Prop: $\operatorname{Ker} A \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sev.

Preuve:
1) $0_{\mathbb{R}^n} \in \operatorname{Ker} A$ $\overbrace{(A \cdot 0 = 0)}^{\text{vérifier !}}$
2) $\forall$ $u, v \in \operatorname{Ker} A$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ alors
alors $A \cdot (u + \lambda v) = \underbrace{A \cdot u}_{0} + \underbrace{\lambda \cdot A}_{0} = 0$ ✓ $\square$.

Ex. de l'Ex. :

i) $F := \left\{ x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \right\} \longleftrightarrow A = (3 \ \ -5 \ \ 2)$

ii) $F_1 := F$, $F_2 := \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 7x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \}$ où $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 7 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$F_3 := F_1 \cap F_2 \equiv \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0$ **et** $7x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \} = \operatorname{Ker} \hat{A}$

4) Soient $u_1, \dots u_k \in \mathbb{R}^n$ $(\Longleftrightarrow (u_1, \dots, u_k) \in (\mathbb{R}^n)^k)$ – on dit que $(u_1, \dots, u_k)$ est une famille des vecteurs (ds $\mathbb{R}^n$).

Déf: $\operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_k) := \left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot u_i}_{\text{une combinaison lin. (des vecteurs } u_1, \dots, u_k)}, \ \lambda_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, k \right\}$

"l'intersect° de 2 sev est aussi un sev."

Prop: $\operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_k) \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sev

Preuve: 1) $0 \in \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ (choix : $\lambda_1 = \lambda_k = 0$)

2) $\forall$ $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$, $w = \sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

alors $v + \lambda w = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \right) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i \right) = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \lambda \beta_i) \cdot u_i \in \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ $\square$.

Rq: 1) On appelle $\operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ l'espace vectoriel engendré par la famille $(u_1, \dots, u_k)$.
2) A partir de maintenant $F \subseteq E$ (pour E, F des signifie : F est un sev de E (et pas seulement un sous-ensemble) (sauf si l'on dit le contraire).

5) $F_1 := \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P'(0) = 0 \}$, $F_2 := \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 3 \}$
alors $F_1 \subseteq \mathbb{R}_2[X]$ mais $F_2 \not\subseteq \mathbb{R}_2[X]$ ← car $0 \notin F_2$
→ contient pas les non nuls

car $\boxed{\forall P_1, P_2 \in F_1, \forall \lambda \in \mathbb{R}}$
$(P_1 + \lambda P_2)'(0) = (P_1' + \underbrace{(\lambda P_2)'}_{= \lambda \cdot P_2'})(0) = \underbrace{P_1'(0)}_{0} + \underbrace{\lambda P_2'(0)}_{0} = 0 \Rightarrow \boxed{P_1 + \lambda P_2 \in F_1}$
→ car $P_1, P_2 \in F_1$ $\square$.

Rq: $\mathbb{R}_2[X] \subseteq \mathbb{R}[X]$

polynôme au max. 2.
$\boxed{\mathbb{R}_2[X] = \operatorname{Vect}(1, X, X^2)}$, car : $\stackrel{\text{def}}{=} \{ a \cdot X^2 + bX + c \cdot 1 \}_{a,b,c \in \mathbb{R}}$ ✓

II.2.3 Les opérations sur des sevs.

- Leur somme et leur intersection

espaces vectoriels

Prop: Soient F_1, F_2, E des e.v.s et $F_1 \subseteq E$, $F_2 \subseteq E$ alors $F := F_1 \cap F_2 \subseteq E$. intersect°

Preuve: 1) zéro $0_E \in F_1$, $0_E \in F_2$ alors $0_E \in F_1 \cap F_2$

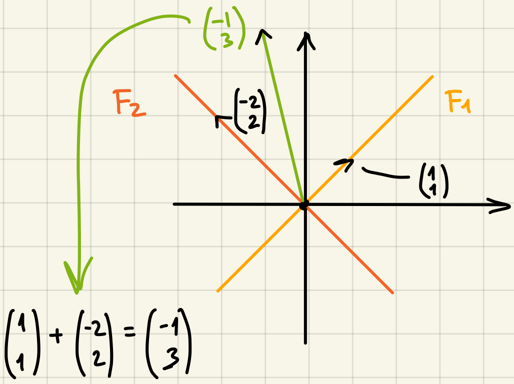
2) $\boxed{\forall\, u, v \in F_1 \cap F_2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}}$

$\Downarrow$

$\left.\begin{array}{l} u + \lambda \cdot v \in F_1 \text{ car } F_1 \subseteq E \text{ car } F_1 \subseteq E \\ \text{mais aussi } u + \lambda \cdot v \in F_2 \text{ car } F_2 \subseteq E \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{u + \lambda v \in F_1 \cap F_2}$

⚠ $F_1 \subseteq E$, $F_2 \subseteq E$ en générale $F_1 \cup F_2 \not\subseteq E$ l'union.

Exple: (E2) $E = \mathbb{R}^2$, $F_1 := \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$, $F_2 := \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) \equiv \left\{\lambda \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\lambda\\-\lambda\end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$



$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in F_1 \cup F_2$, $\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} \in F_1 \cup F_2$ mais $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \notin F_1 \cup F_2$

Rq: $F_1 \cup F_2 \subseteq E \iff$

soit $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow F_1 \cup F_2 = F_2$
soit $F_2 \subseteq F_1 \Rightarrow F_2 \cup F_1 = F_1$

Déf: Soient $F_1 \subseteq E$, $F_2 \subseteq E$ alors

1) $F_1 + F_2 := \{ v_1 + v_2 \mid v_1 \in F_1, v_2 \in F_2 \}$ La $\boxed{\text{somme}}$ de F_1 et F_2

2) Si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ alors on dit que $F_1 + F_2$ est une $\boxed{\text{somme directe}}$ et on écrit $F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2$

3) F_3 est $\boxed{\text{complémentaire}}$ à F_1 ssi $E = F_1 \oplus F_3$.

Exples. 1) (E2) (ci-dessus). $F := \left\{ \underbrace{\lambda \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\in F_1} + \underbrace{\mu \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}_{\in F_2},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

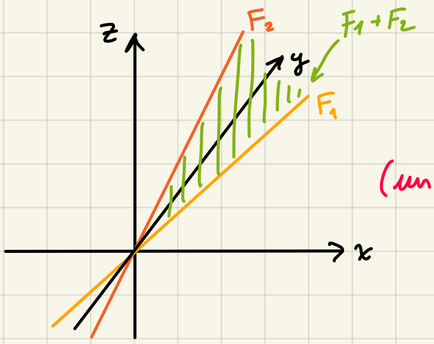
alors ici $F = \mathbb{R}^2$ mais c'est aussi une somme directe: $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$ car $F_1 \cap F_2 = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ ✓

par conséquence F_1 est complémentaire à F_2.
" (F_2) " (F_1)

2) $E = \mathbb{R}^3$, $F_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, $F_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$

le produit vectoriel

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$



$F_1 + F_2 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 3y + z = 0 \right\} \rightarrow$ forme cartésienne du P

(un plan P)

$F_1 + F_2 = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$ forme paramétrique du p.

$P \equiv F_1 + F_2 \subsetneq \mathbb{R}^3$

Prop: $F_1 \subseteq E$, $F_2 \subseteq E$ alors $F_1 + F_2 \subseteq E$

Preuve:

1) $0 \in F_1$, $0 \in F_2$ alors $0 = 0 + 0 \in F_1 + F_2$
(ou en utilisant que $F_1 \subseteq F_1 + F_2$)

⚠ 2) $\forall x, y \in F_1 + F_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$x = v_1 + v_2$, $y = w_1 + w_2$, où $v_1, w_1 \in F_1$, $v_2, w_2 \in F_2$, alors $x + \lambda y = v_1 + v_2 + \lambda(w_1 + w_2) = \underbrace{v_1 + \lambda \cdot w_1}_{F_1} + \underbrace{v_2 + \lambda \cdot w_2}_{F_2}$ ✓ $\square$.

$\Rightarrow x + \lambda y \in F_1 + F_2$

Prop: Soit $F_1, F_2 \subseteq E$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$
alors $\forall x \in F_1 \oplus F_2$ alors $\exists!\ v_1 \in F_1, v_2 \in F_2$ t.q $x = v_1 + v_2$

Preuve: 1) existence de v_1 et v_2 par déf. de la somme.

2) unicité : $\left.\begin{matrix} x = v_1 + v_2 \\ x = w_1 + w_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 0 = v_1 + v_2 - (w_1 + w_2) = \\ = v_1 - w_1 + v_2 - w_2 \end{matrix}\Big\} \Leftrightarrow \underbrace{w_1 - v_1}_{\in F_1} = \underbrace{v_2 - w_2}_{\in F_2} \Big\} \Rightarrow$

aussi $w_1 - v_1 \in F_2$

$\Rightarrow w_1 - v_1 = F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \Leftrightarrow w_1 - v_1 = 0 \Leftrightarrow w_1 = v_1$
et aussi $0 = v_2 - w_2 \Rightarrow w_2 = v_2$ $\square$.

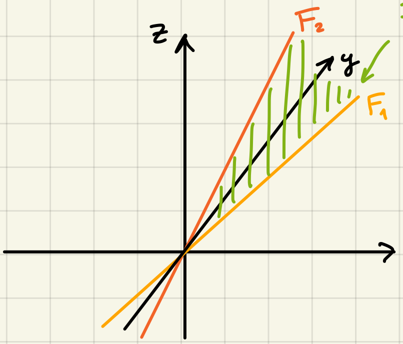
Rq: On peut aussi définir une somme directe de plusieurs s.e.v.s.

$F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus \ldots \oplus F_k := F_1 \oplus (F_2 \oplus (F_3 \oplus \ldots (F_{k-1} \oplus F_k)))$ p. exple

Exple: $E = \mathbb{R}^3$, $F_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, $F_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}\right)$, $F_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}\right)$.

"toute droite qui passe p. l'org. est un s.e.v."

$F_3 \subseteq F_1 + F_2 \equiv P$



$F_1 + F_2 + F_3 := (F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$
alors $F_1 + F_2 + F_3 \neq F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$

même si
$F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2$
$F_1 + F_3 = F_1 \oplus F_3$
$F_2 + F_3 = F_2 \oplus F_3$

II 3 Des bases et la dimension des evs

II.3.1 Déf:

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs dans E (i.e. E est un esp. vect. et $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$).

1) On dit que $\mathcal{F}$ est $\boxed{\text{libre}}$ (ou les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont linéairement indépendants)

si l'equation $\boxed{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \ldots + \lambda_n \cdot u_n \equiv \sum_{i=n}^{n} \lambda_i \cdot u_i = 0 \equiv 0_E}$ (*)

implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

2) $\mathcal{F}$ est $\boxed{\text{génératrice}}$ si $\boxed{\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = E}$

"$\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot u = 0$
$\Rightarrow$ forcém^t $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$"

3) $\mathcal{F}$ est une $\boxed{\text{base}}$ de E si $\mathcal{F}$ est libre et génératrice.

Exples.

i) Soit $F_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ une famille libre dans $\mathbb{R}^2$.

et on l'écrit (souvent): $e_1 \equiv \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 \equiv \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

- F est libre, car $\lambda \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ on veut:
  $\Longleftrightarrow \lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$
- F_1 est génératrice car $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^2$
- F_1, étant libre et génératrice, la famille forme une base canonique de $\mathbb{R}^2$

ii) Soit $F_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right)$ une famille dans $\mathbb{R}^2$,

- F_2 n'est pas libre (ds $\mathbb{R}^2$), car $\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 + 3\lambda_2\\\lambda_1 + 3\lambda_2\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, alors (*)
  F_2 a des solutions non-triviales $(\neq 0)$ pour λ_1 et λ_2. Par exple: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$
- F_2 n'est pas génératrice, car $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \subsetneq \mathbb{R}^2$.

iii) Soit $F_3 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$ une famille dans $\mathbb{R}^2$.

- F_3 est libre, car $\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \lambda_1$ et $\lambda_2 = 0$.
- mais F_3 n'est pas génératrice, car $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) \subsetneq \mathbb{R}^2$

iv) Soit $F_4 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}\right)$ une famille dans $\mathbb{R}^3$.

- F_3 n'est pas libre, car $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
- F_3 n'est pas génératrice, car $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}\right) \subsetneq \mathbb{R}^3$

Déf./Prop: Le nombre n des éléments d'une base E (si $n \in \mathbb{N}$) est indépendant du choix de la base

On appelle $n = \dim E$, la $\boxed{\text{dimension}}$ de E.

Exple: $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ une base de $\mathbb{R}^2$, $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ une autre base de $\mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow \dim(\mathbb{R}^2) = 2$ $\square$.