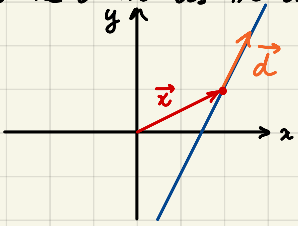
I.3 Un peu de géométrie à basse dimension ($\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$)

- Une droite ds $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ – forme paramétrique :



paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\vec{x}(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \end{pmatrix} = \vec{x}_0 + \lambda \cdot \vec{d}$$

un vecteur direction

($\vec{x}_0$:) un pt. sur la droite.

$$d = \{\vec{x}(\lambda) \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$n = 2, 3, \dots$

une droite ds $\mathbb{R}^n$

- Un plan $p \in \mathbb{R}^3$:
  - forme paramétrique :

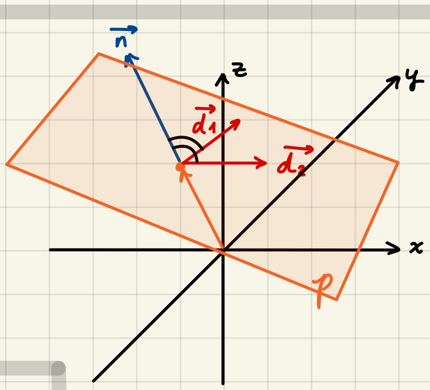
2 paramètres

$$\boxed{\vec{x}_\cdot(\lambda, \mu) = \vec{x}_0 + \lambda \cdot \vec{d}_1 + \mu \cdot \vec{d}_2}$$

($\vec{x}_0$:) un pt. sur p.

deux vecteurs de direction ($\vec{d}_1 \not\parallel \vec{d}_2$)

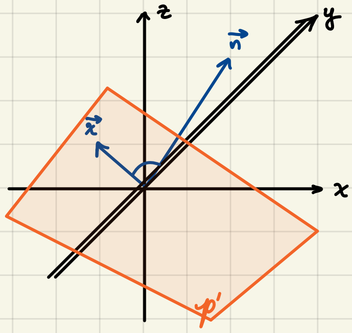
$$p = \{\vec{x}(\lambda, \mu),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$



  - forme cartésienne :

le produit scalaire

$$p' = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{n} | \vec{x} \rangle = 0\}$$
$$p = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{n} | \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle = 0\}$$



Rappel : $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, on observe que $\langle \vec{a} | \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle + \langle \vec{a} | \vec{c} \rangle$

alors. $\langle \vec{n} | \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle = \langle \vec{n} | \vec{x} \rangle - \underbrace{\langle \vec{n} | \vec{x}_0 \rangle}_{:= b \in \mathbb{R}} = 0$

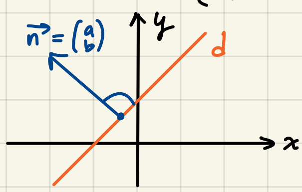
$$\boxed{\begin{aligned} p &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{n} | \vec{x} \rangle = b\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = b \right\} \end{aligned}}$$

($\vec{n}$, b fixés)

plus généralement :
une équation lin ds $\mathbb{R}^n$,
$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b$ décrit un hyperplan = plan de dimension $n-1$.
$n=3$ hyperplan = plan
$n=2$ hyperplan = droite

Forme cartésienne d'une droite en $\mathbb{R}^2$

d ds $\mathbb{R}^2$: $d = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, ax + by = c \right\}$



Forme cartésienne d'une droite en $\mathbb{R}^3$

$$d = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{matrix} A_{11} \cdot x_1 + A_{12} \cdot x_2 + A_{13} \cdot x_3 = b_1 \text{ et} \\ A_{21} \cdot x_1 + A_{22} \cdot x_2 + A_{23} \cdot x_3 = b_2 \end{matrix} \right\}$$

$$= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot \vec{x} = \vec{b}\}$$

$A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$

Rappel : $\boxed{A \cdot \vec{x} = \vec{b}}$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\vec{b} \in \mathbb{K}^m$ (*)

$\Updownarrow$

$$\begin{matrix} A_{11} \cdot x_1 + A_{12} \cdot x_2 + \dots + A_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ \vdots \\ A_{m1} \cdot x_1 + A_{m2} \cdot x_m + \dots + A_{mn} \cdot x_n = b_m \end{matrix}$$

On a résolu un système comme ça pour l'algo. de Gauss.

OU si $n = m$ et $\det A \neq 0$: $\vec{x} = A^{-1} \cdot b$ (solut° unique)

car $A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}$

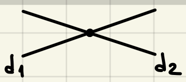
$$A^{-1} \cdot (*) . \quad \underbrace{\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{\mathbb{1}} \cdot \vec{x}}_{\vec{x}} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$\square$.

Les systèmes $n \times n$ revus :

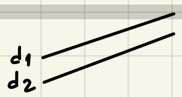
$n=2$ $\quad A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ c'est l'intersection de deux droites.

cas 1 :



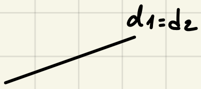
solut° unique $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rg}\, A = 2 \Longleftrightarrow \det A \neq 0$

cas 2 :



pas de solut° $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rg}\, A = 1$, $\underbrace{\mathrm{rg}\, \hat{A} \equiv \mathrm{rg}\,(A, b) = 2}$

cas 3 :



la solut° est une droite (un paramètre) $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, \hat{A} = 1$

$n=3$ $\quad$ l'intersection de trois plans

$$\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & b_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & b_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & b_3 \end{array}$$

$\downarrow$ Gauss

$$\begin{array}{ccc|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

pour cette colonne, (1 paramètre)

$\mathrm{rg}\, A = 3$ solut° unique

$\Updownarrow$

$(\det A \neq 0)$

$\mathrm{rg}\, A = 2$ ou 1 et $\mathrm{rg}\, \hat{A} > \mathrm{rg}\, A \longrightarrow$ pas de solut°

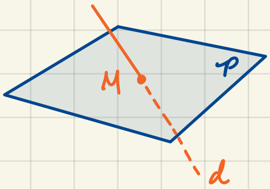
$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, \hat{A} = 2 \longrightarrow$ une droite (un paramètre).

$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, \hat{A} = 1 \longrightarrow$ un plan (deux paramètres).

Exple : (Intersection d'un plan p avec une droite d (avec plusieurs méthodes)) :

$$p := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x + 2y - z = 5 \right\} \quad \text{(forme cartésienne).}$$

$$d := \left\{ \vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{(forme paramétrique).}$$



Intersection : $3x(\lambda) + 2y(\lambda) - z(\lambda) = 5$ chercher λ et mettre ds $\vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{pmatrix}$

$$\underbrace{3 \cdot (1+\lambda) + 2(2+\lambda) - (3+2\lambda)}_{4+3\lambda} = 5 \Big\} \ \lambda = \tfrac{1}{3}$$

$$\boxed{\vec{M} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}}$$

$$p' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x + y - 2z = 5 \right\}$$

$\underline{d \cap p'}$: $\underbrace{3(1+\lambda) + (2+\lambda) - 2(3+2\lambda)}$ $= 5$

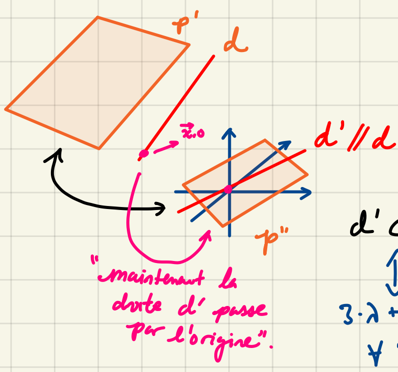
$3\lambda \quad + \lambda \quad - \quad 4\lambda$

$4\lambda - 4\lambda = 0\lambda$

$-1 + 0 \cdot \lambda = 5$ ϟ $\longrightarrow$ contradiction

$\Longrightarrow d \parallel p'$

$$p'' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x + y - 2z = 0 \right\} \quad d' = \left\{ \vec{x}(\lambda) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$



$d' \subset p''$

$\Updownarrow$

$3 \cdot \lambda + \lambda - 2 \cdot 2\lambda = 0$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $0 = 0$ ✓

$$d = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 3x + y - 2z = 1 \text{ et} \\ x - y = 1 \end{matrix} \right\}$$ (forme cartésienne).

Vérification que c'est vraiment une déscript° de d, par Gauss :

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}$$

③ $C_1 \leftrightarrow C_3$

μ (paramètre)

rg $\mathcal{A} = 2$, $\mathcal{A} \equiv \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$x = \mu$

$-y + x = -1 \Rightarrow y = 1 + \mu$

$-2z + y + 3x = -1$ $\quad 4\mu$

$-2z + (\cancel{1} + \mu) + 3\mu = -\cancel{1}$

$\Leftrightarrow 4\mu = 2z - 2 \Leftrightarrow z = 2\mu + 1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{x}(\mu)} \qquad \mu = 1 + \lambda$$

$$\vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(car $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1+\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$)

$\square$.

Refaire l'intersection $p \cap d$ (et $p' \cap d$) avec Gauss :

$$\begin{array}{l|ccc|c} & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 2 & -1 & 5 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & -1 \\ \tfrac{1}{2} & 0 & 4 & -2 & 2 \\ & 0 & 5 & -1 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{l|ccc|c} & 1 & -1 & 0 & -1 \\ & 0 & 2 & -1 & 1 \\ \tfrac{5}{2} & 0 & 5 & -1 & 8 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & -1 \\ & 0 & 2 & -1 & 1 \\ & 0 & 0 & \tfrac{3}{\cancel{2}} & \tfrac{11}{\cancel{2}} \end{array}$$

$3z = 11 \Rightarrow \boxed{z = \frac{11}{3}}$

$2y - z = 1 \Rightarrow 2y - \frac{11}{3} = 1$

$6y - 11 = 3$

$3y = 7 \Rightarrow \boxed{y = \frac{7}{3}}$

$x - y = -1 \Leftrightarrow x - \frac{7}{3} = -1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{4}{3}}$

plan ds $\mathbb{R}^3$ plus simple en forme cartésienne :

forme cartésienne $\xrightarrow{\text{Gauss}}$ paramétrique

Exple: $3x + 2y - z = 5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 5 \end{array} \right) \quad 3x + 2y - z = 5$$

α β — 2 paramètres

$\Downarrow$

$3x = 5 + \beta - 2\alpha$

$\div 3$: $x = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\beta - \frac{2}{3}\alpha$

$\boxed{y = \alpha}$ $\boxed{z = \beta}$

$$\vec{x}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou $\tilde{\alpha} := \frac{\alpha}{3}$, $\tilde{\beta} := \frac{\beta}{3}$

$$\boxed{\vec{x}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\alpha} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

une forme paramétrique

Plan $p \subset \mathbb{R}^3$: forme paramétrique $\xrightarrow{?}$ forme cartésienne (plus simple)

Le produit vectoriel ds $\mathbb{R}^3$ ← pas ds le programme, mais utile.

$$\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a & d \\ c & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 7 \\ +1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Exple:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ +1 \\ -3 \end{pmatrix}$$ ← ici, on inverse le signe!

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$: $(2 \cdot 2) - (3 \cdot -1)$; $4 + 3 = 7$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$: $(1 \cdot 2) - (3 \cdot 1)$; $2 - 3 = -1$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$: $(1 \cdot -1) - (2 \cdot 1)$; $-1 - 2$; -3

Ptés:

- $\langle \vec{a} \wedge \vec{b} \mid \vec{a} \rangle = 0$, $\langle \vec{a} \wedge \vec{b} \mid \vec{b} \rangle = 0$ } c'est ça que nous intéresse ici
- $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ (facile à comprendre)
- $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{c})$ → identité de Jacobi

Pas associatif!

Application: $$\vec{x}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{d_1}} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{d_2}}$$

$$\tilde{\vec{n}} := \vec{d_1} \wedge \vec{d_2} = \begin{pmatrix} 9 \\ +6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\vec{n} := \frac{1}{3} \tilde{\vec{n}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$