Rappel:
$A+B$ si $A,B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$
$A\cdot B$ si $A\in\mathcal{M}_{m,k}$, $B\in\mathcal{M}_{k,n}$ $\Rightarrow$ $A\cdot B\in\mathcal{M}_{m,n}$
A^T $\quad A\in\mathcal{M}_{m,n}$, $A^T\in\mathcal{M}_{n,m}$ évidement $(A^T)^T=A$

Déf: Soit $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A^* := \underbrace{(\overline{A})^T}_{\text{le complexe conjugué}} \overset{\text{même chose}}{\equiv} \underbrace{\overline{(A^T)}}_{\text{on fait le conjugué et on la transpose}}$ la matrice adjointe "transconjuguée"

Lemme: $(A^*)^*=A$

Exple:
$$A=\begin{pmatrix}1+i & 3-i\\ 2 & -2\\ i & 5i\end{pmatrix}\qquad A^T=\begin{pmatrix}1+i & 2 & i\\ 3-i & -2 & 5i\end{pmatrix}\qquad A^*=\begin{pmatrix}1-i & 2 & -i\\ 3+i & -2 & -5i\end{pmatrix}$$

$u,v\in\mathbb{R}^n$
$u\equiv\vec{v}$, $v\equiv\vec{v}$
Produit scalaire $\boxed{\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle := \sum_{l=1}^{n} u_l\cdot v_l}$

Exple: $u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}-1\\3\\-3\end{pmatrix}$

$\langle u|v\rangle = -1+6-9=-4$

$$\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\right\rangle = \underbrace{\underbrace{2\cdot1}_{2}+\underbrace{1\cdot3}_{3}+\underbrace{(-5)\cdot(-2)}_{(10)}}_{5+10} = 15$$

$$\boxed{(A\cdot B)_{i,j} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{l=1}^{k} A_{il}\cdot B_{lj}}$$

$$(A\cdot B)_{ij}:\ \left[\underset{A}{i\to\begin{pmatrix} u^T \end{pmatrix}}\cdot\underset{B}{\begin{pmatrix}\overset{j}{\downarrow}\\ v\end{pmatrix}}\right]_{ij} = \langle u,v\rangle$$

"on veut matricer les colonnes donc on passe de u à u^T pour avoir la colonne."

Exple:
$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&1&-5\\3&0&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&-2&1\\-1&0&3\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&1&-5\\3&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-2&1\\-1&0&3\\2&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&4&-11\\-3&-14&15\\20&2&-5\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}4&-2&1\\-1&0&3\\2&2&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&1&-5\\3&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & \\ & & 9\\ & & \end{pmatrix}$$

Généralisation $\boxed{A\cdot B\neq B\cdot A} \Leftarrow$

Prop:
1) $A+B=B+A$ avec $A,B\in\mathcal{M}_{mn}$
2) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ associativité $\forall A\in\mathcal{M}_{m,k}$, $B\in\mathcal{M}_{k,l}$, $C\in\mathcal{M}_{l,n}$ $\rightarrow$ **Notation:** $ABC\equiv A\cdot B\cdot C := A\cdot(B\cdot C)$, $AB\equiv A\cdot B$
3) $A\cdot(B+\lambda C)=A\cdot B+\lambda A\cdot C$ $\quad\forall A\in\mathcal{M}_{m,k}$, $B,C\in\mathcal{M}_{k,m}$ $\lambda\in\mathbb{K}$
distributivité à droite
4) $(A+\lambda B)\cdot C = AC+\lambda BC$

Déf:
1) La matrice nulle: $\mathbb{O}\in\mathcal{M}_{m,n}$, $\mathbb{O}_{ij}=0$ $\forall i,j$ (pour chaque taille.)
2) La matrice identité: $I\in\mathcal{M}_n\equiv\mathcal{M}_{n,n}$ (Noté aussi $\mathbb{1}$, I_n ou $\mathbb{1}_n$), $I_{ij}\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases}$

Lemme:
1) $A+\mathbb{O}=A$
2) $A\cdot I_n=A$ $\quad\forall A\in\mathcal{M}_{m,n}$
et $I_n\cdot A=A$

Déf: Une matrice A est inversible si $\exists B$ t.q. $A\cdot B=B\cdot A=I$ **Notation:** $A^{-1}:=B$
Rq: A est forcément une matrice carrée.

Exple:
1) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ $\quad B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2&2\\3&-1\end{pmatrix}$

$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2&2\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}=I$ $\quad\Rightarrow B=A^{-1}$ ici

$3\cdot2=6-2=4$

"ici on a montré que $A\cdot B$ est la matrice identité."

Prop: $A,B\in\mathcal{M}_n$ alors $A\cdot B=I_n \Longleftrightarrow B\cdot A=I_n$
Rq: si par exple, $A\in\mathcal{M}_{m,n}$, $n\neq m$ et $B\in\mathcal{M}_{m,n}$ et $B\cdot A=I_n \Rightarrow B\cdot A\neq I_n$

② $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -6 & -10\end{pmatrix}$ on peut démontrer qu'il n'existe pas A^{-1}.

Comment décider si une matrice a une réciproque et comment calculer A^{-1} ?

- $n=1$ $\quad A=(a) \quad A^{-1}\ \exists \iff a\neq 0$
  $I_1=(1) \qquad A^{-1}=\left(\frac{1}{a}\right)$

- pour n générale, on a $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$
  et $\exists A^{-1} \iff \det(A)\neq 0$.
  Le déterminant pour $n=2$ et $n=3$:
  Exple: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $\tilde{A}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -6 & -10\end{pmatrix}$

  diagonales positive et négative

  $\det A = \det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 3\cdot 2 = \underline{-4\neq 0} \Rightarrow A^{-1}\exists$

  notation plus simple avec des barres

Pour les Matrices 2×2 et 3×3

  $\det(\tilde{A}) = \begin{vmatrix}3 & 5\\ -6 & -10\end{vmatrix} = -30-(-30) = \underline{0} \Rightarrow \tilde{A}^{-1}\ \nexists$

- $n=3$
  Exple: $\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix} = \underbrace{(3+12-6)}_{9} - \underbrace{(9-12+2)}_{(-1)} = 10$

  Pour les déterminants: $\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & 3 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 2 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 3 & 3 & 1\end{array}\right.$

  Ceci ne se généralise pas comme ça pour $n>3$.

- Par contre, la méthode suivante (une alternative pour $n=3$ aussi) est correcte pour $n\in\mathbb{N}^*$.

  $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 3\end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}$

  $-2-3=-5\times 3=-15$

  $= 1+24-15 = 10$ ✓

+	−	+
−	+	−
+	−	+

  ① choisir une ligne ou une colonne,
  ici L_1

  $A\in\mathcal{M}_n,\ A^{(ij)}\in\mathcal{M}_{n-1},\ A^{(ij)} = $ (A avec la ligne i et la colonne j à effacer) — effacer

  $$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\cdot(-1)^{i+j}\cdot\det\left(A^{(ij)}\right)$$

  développement par rapport au L_i

Gauss

- Relation avec l'algorithme de Gauss:
  Rappel: ① $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \quad \leftarrow (i\neq j)$
  ② $L_i \leftrightarrow L_j$
  ③ $C_i \leftrightarrow C_j$
  ④ $L_i \leftarrow \lambda\cdot L_i \quad (\lambda\in\mathbb{K}^*)$

Prop: 1) $\det(A) \xrightarrow{①} \det(A)$ ne change pas! si vous appliquez l'opération ①.
2) $\det(A) \xrightarrow{② \text{ ou } ③} \ominus \det(A)$ l'opération ① change le signe.
3) $\det(A) \xrightarrow{④ \lambda} \lambda \cdot \det(A)$

Rq: 1- Il y a une application $\det : \mathcal{M}_n \to \mathbb{K}$ unique qui satisfont 1), 2), 3) ET $\det(I) = 1$.
2- Pour les matrices triangulaires / échelonné

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & & * \\ & A_{22} & \\ 0 & & \ddots A_{nn} \end{pmatrix} = A_{11} \cdot A_{22} \cdot \ldots \cdot A_{nn}$$

Exple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow -2 \\ \leftarrow -3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 2 = 10 \checkmark$$

Prop: $A, B \in \mathcal{M}_n$, $\lambda \in \mathbb{K}$
1) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
2) $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det(A)$
3) $\det(A^T) = \det(A)$
$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ (si $\det(A) \neq 0$)

Comment déterminer La matrice réciproque (inverse) : $(A \in \mathcal{M}_n, \ \det(A) \neq 0)$?

Prop: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ t.q. $\det(A) \equiv ad - bc \neq 0$ alors **Preuve:** à vous, simple!

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

• $n \geq 2$: méthode 1 $\boxed{\text{Gauss-Jordan}}$

$$\underset{n \times n}{A} \,|\, \mathbb{1} \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{matrix} \tilde{A}_{11} & & * \\ & \tilde{A}_{22} & \\ 0 & & \tilde{A}_{nn} \end{matrix} \middle| \, * \right) \longrightarrow \left| \begin{matrix} \tilde{A}_{11} & * & 0 \\ & \tilde{A}_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 \ldots 0 & & \tilde{A}_{nn} \end{matrix} \right| * \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{1} | B}$$

pivot

avec $\tilde{A}_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$

Thrm: $B = A^{-1}$

• méthode 2 . avec la comatrice.

Déf: La comatrice $\text{com}(A)$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n$: $[\text{com}(A)]_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A^{(i,j)})$

qd on supprime la i-ligne et j-colonne

Prop: Soit $A \in \mathcal{M}_n$ et $\det(A) \neq 0$ alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{com}(A))^T$

Exple: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A^{(11)} = d$, $A^{(12)} = c$

$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (\text{com}(A))^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Exple: $3 \times 3 \longrightarrow$ SolEx.

Rq: 1- $n \geq 4$: méthode 1 plus efficace.
2- erreur de calcul plus localisé ds méthode 2.
3- après calcul de A^{-1} : vérification explicite!

Déf: $\text{tr.} \ \mathcal{M}_n \to \mathbb{K}, \ A \mapsto \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

Lemme: 1- $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$
2- $\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B \cdot A)$

Exple: $\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$

La trace d'une matrice carrée A est définie comme la somme de ces coefficients diagonaux. Noté $\text{tr}(A)$.