I. SYSTÈMES LINÉAIRES + MATRICES

26/01
ALGÈBRE 2

I.1 Systèmes linéaires et l'algorithme de Gauss.

(E) $\begin{cases} \boxed{x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2} \\ \boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 2} \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Solutions uniques $x_1 = 5$, $x_2 = -6$, $x_3 = 3$

(F) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$

famille de solutions

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

géometriquement une droite des $\mathbb{R}^3$

(G) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$

$\nexists$ solutions!

Pourquoi (un comportement différent) ?

(E): 3 eqs. indépendantes pour 3 inconnus.

(F): 2 ______ " ______.

(2F1 - F2 = F3)

(G). 2G1 - G2 - G3 $\Rightarrow 0 = (-1)$! 3 éqs. contradictoires.

Comment trouve-t-on ceci systematiquement? ⟶ L'algorithme de Gauss.

$\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ $\quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ $\quad n$ inconnus.

$$(*) \begin{cases} A_{11} \cdot x_1 + A_{12} \cdot x_2 + \dots + A_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ A_{21} \cdot x_1 + \dots + A_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ A_{mn} \cdot x_1 + \dots + A_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

$A_{ij} \in \mathbb{K}$, $\forall i = 1, m$, $\forall j = 1, n$

$b_i \in \mathbb{K}$

Sa matrice de taille m fois n

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1}, & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

La matrice etendue du système $(*)$: $\hat{A} = (A, b) \in \mathcal{M}_{m, n+1}$ (lignes: m, colonnes: $n+1$)

Notation
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$
pour les matrices carrées.

Déf: Les opérations élémentaires:

1) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \qquad i \neq j, \lambda \in \mathbb{K}$
2) $L_i \leftrightarrow L_j$
3) $C_i \leftrightarrow C_j$ (avec leurs variables!)
4) $L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}^*$

$(*)$ plus court:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} & b_1 \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & & A_{mn} & b_m \end{array}\right)$$
$(x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)$

1er Pivot de Gauss

si l'on utilise (3)

- si $A_{11} = 0$ utiliser (2) et/ou (3) t.q. $\underbrace{\text{le nouveau } A_{11}}_{\check{A}_{11}} \neq 0$
- On applique (1) plusieurs fois t.q. $\check{A}_{21} = 0, \dots, \check{A}_{m1} = 0$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{A_{21}}{A_{11}} L_1$$

- ensuite $\check{A}_{22}$ 2ème pivot de Gauss si $\check{A}_{22} \neq 0$
- etc.

Déf: Le rang d'une matrice A
$r := rg(A)$.

Thm: $\exists$ sol $\iff rg(A) = rg(\hat{A}) \equiv rg(A, b)$
(càd $\nexists$ sol $\iff rg(A, b) = rg(A) + 1$)

- résultat $\tilde{A} | \tilde{b}$

des paramètres

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} \tilde{A}_{11} & * & \dots & * & & * & & * & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{A}_{22} & * & \dots & \vdots & & & & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{rr} & & \tilde{A}_{r\,r+1} & & \tilde{A}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\tilde{A}_{11} \neq 0$, $\tilde{A}_{22} \neq 0$, $\tilde{A}_{rr} \neq 0$

$\exists$ sol. $\iff \tilde{b}_{r+1} = 0$

si $\tilde{b}_{r+1} = 0$, résoudre le nouveau système de en bas vers en haut.

Exple:

(E)
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array} \quad \cdot(-1),\ \cdot(-3)$$

$L_2 \leftarrow L_2 + (-1) L_1$ $\;(= L_2 - L_1)$

$$\begin{array}{r|ccc|c} & 1 & 2 & 3 & 2 \\ L_1 - L_2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ L_3 - (3 \cdot L_1) & 0 & -3 & -8 & -6 \end{array} \quad \cdot(-3)$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \quad \overset{\text{si l'on veut}}{\longleftrightarrow} \text{ avec (4)} \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

1) $x_3 = 3$
2) $x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -6$
3) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$
$x_1 - 12 + 9 = 2 \Rightarrow x_1 = 5$

La solution ici (unique)
$$\boxed{\vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}} \quad \square.$$

syst. 2 / syst. 3

$$\begin{array}{r|ccc|c|c} & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ & 1 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ \hline \text{L1 reste:} & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ L_3 - L_2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \quad \cdot(-1)$$

résoudre deux systèmes ((F) et (G)) au même temps.

λ un paramètre $\lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$\boxed{\text{rg}(A) = 2}$ pour (F) & (G)
$\text{rg}(A,b) = 2$ pour (F)
$\phantom{\text{rg}(A,b) =}\ 3$ pour (G)

$\Rightarrow$ (G) $\nexists$ sol.
(F). 1) $x_3 = \lambda$
2) $x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$
3) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \Rightarrow x_1 = 2 + \lambda$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \square.$$

Thrm du Rang: (Version préliminaire)

Soit $\text{rg}(A,b) = \text{rg}(A)$. $(\Rightarrow \exists$ sols$)$
paramètres de la solution $= n - r$

n: # des inconnus; r: $\text{rg}(A)$

I.2 Des matrices et des opérations sur/entre eux:

- $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \equiv \mathcal{M}_{m,n}$ (si claire)
  $\exists$ une addition: $\boxed{C = A + B}$

  $$\boxed{C_{ij} := A_{ij} + B_{ij}} \quad \begin{pmatrix} \forall i = 1, \dots, m \\ \forall j = 1, \dots, n \end{pmatrix}$$

Rq: $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}$.
Alors $A + B$ définie seulement ssi $p = m$, $q = n$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ("scalaire")
  $B := \lambda \cdot A$,
  $$\boxed{B_{ij} := \lambda \cdot A_{ij}}$$

Exple:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 9 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \square.$$

- $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ la transposée A^T de A.

  $A^T \in \mathcal{M}_{m,n}$ $\qquad \boxed{(A^T)_{ij} := A_{ji}}$

Exple:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \square.$$

Déf: Soit $M \in \mathcal{M}_n$.
- M symétrique $\Longleftrightarrow M^T = M$
- M anti-symétrique $\Longleftrightarrow M^T = -M$ $(\equiv (-1) \cdot M)$

Exple:
1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq M^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ } ni sym. ni anti-sym.

2) $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ symétrique

3) $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ni un ni l'autre. $-3 \neq 3$

4) $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ anti-sym. $\square$.

Lemme:

Soit $M \in \mathcal{M}_n$ $\exists!$ $S = S^T$ et $A = -A^T$ t.q. $M = S + A$

Preuve: $M = \underbrace{\frac{1}{2}\left(M + M^T\right)}_{=:S} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(M - M^T\right)}_{=:A}$

- Multiplication des matrices (produits)

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ $B \in \mathcal{M}_{p,q}$ définie ssi $p = n$ et alors $C = A \cdot B \in \mathcal{M}_{m,q}$.

$$\boxed{C_{ij} := \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}}$$

Exple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 13 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}$$

$1(1) + 2(-1) + 3(-2) = -7$

$1(2) + 2(1) + 3(3) = 13$

$0(1) + 4(-1) + -2(-2) = 0$

$0(2) + 4(1) + -2(3) = -2$

$$B \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{3,2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{2,3}} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -1 \\ -1 & 2 & -5 \\ -2 & 8 & -12 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}$$

$1(1) + 2(0) = 1$ $\quad 1(2) + 2(4) = 10$ $\quad 1(3) + 2(-2) = -1$

$-1(1) + 1(0) = -1$ $\quad -1(2) + 1(4) = 2$ $\quad -1(3) + 1(-2) = -5$

$-2(1) + 3(0) = -2$ $\quad -2(2) + 3(4) = 8$ $\quad -2(3) + 3(-2) = -12$