III 5.2 Des rotations ds $\mathbb{R}^n$ (continuation)

27/04
Ifricey
ALGÈBRE 2

Rappel: 1) $\langle\cdot|\cdot\rangle$ (produit scalaire) $: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$

2) $(A^T)_{ij} \overset{\text{déf}}{=} A_{ji}$

3) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ $\quad x \in \mathbb{R}^n,\ z = A\cdot x \iff z_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\cdot x_j$

une représentation de ceci est important pour comprendre les rotations.

Lemme: $\forall x,y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle y | Ax\rangle = \langle A^T y | x\rangle$

Preuve: $\langle y | A\cdot x\rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i\ (Ax)_i =$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\ x_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} (A^T)_{ji}\ y_i\right)}_{(A^T y)_j} \cdot x_j \qquad \square.$$

Rappel: $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $R \in O(n) \overset{\text{déf}}{\iff} \forall x,y \in \mathbb{R}^n$:
$\langle Rx | Ry\rangle = \langle x|y\rangle$ ← groupe orthogonale
(= le groupe des rotations – propres et impropres).
Si en plus $\det(R) = 1$

Prop: 1) $R \in O(n) = O(n,\mathbb{R})$
$\iff R^T\cdot R = \mathbb{1}$
2) $R \in O(n) \Rightarrow \det R \in \{+1,-1\}$

Preuve: 2) cf. la dernière fois.

1) $\Leftarrow$) $\langle x|y\rangle = \langle x|\mathbb{1}\cdot y\rangle =$
$= \langle x | R^T(Ry)\rangle \overset{\text{Lemme}}{=} \langle (R^T)^T x | Ry\rangle =$
$= \langle Rx | Ry\rangle \quad \square.$

$\Rightarrow$) (esquisse) $\forall x,y$: $\underbrace{\langle Rx|Ry\rangle}_{\overset{\text{Lemme}}{=} \langle R^T\cdot(Rx) | y\rangle} = \langle x|y\rangle = \langle (R^T R)x | y\rangle = \langle x|y\rangle \overset{\forall y}{\Longrightarrow} R^T R x = x$
$\overset{\forall x}{\Longrightarrow} R^T R = \mathbb{1} \quad \square.$

Alors: • $O(n) = \{R \in \mathcal{M}_n \mid R^T\cdot R = \mathbb{1}\}$
• $SO(n) = \{R \in O(n) \mid \det(R) = +1\}$

Rq: en TD preuve que
Prop: $R \in SO(2) \Rightarrow \exists \alpha \in [0,2\pi[\in \mathbb{R}$ t.q. (*)

Exples. $n=2$

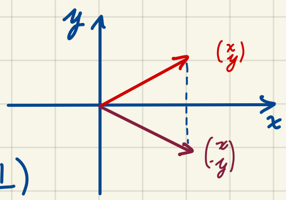
1) (*) $R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow R^T\cdot R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R \in O(2)$,

$\det\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \boxed{R \in SO(2)}$

2) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R^T \Rightarrow R\cdot R^T = \mathbb{1} \Rightarrow \boxed{R \in O(2)}$

$\det(R) = -1$ $\quad \boxed{R \notin SO(2)}$

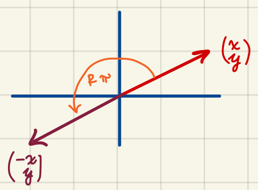
$f_R: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$



Une réflexion par rapport à $y=0$. Une symétrie $(R^2 = \mathbb{1})$

3) $R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix}$

$\boxed{R \in SO(2)}$



réflexion p. rapport à l'origine.

Exples. $n=3$

4) $R_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3)$ Une rotat° autour de l'axe z par l'angle α.

5) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(3)$, $\notin SO(3)$

Symétrie (réflexion) p. rapport au $z=0$

6) $R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(3)$, $\notin SO(3)$

7) $R_y = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \in SO(3)$

Ex : 1) $R_z(\alpha)\, R_y(\beta) \neq R_y(\beta)\, R_z(\alpha)$ $\Rightarrow$ $SO(2)$ abélien

2) $R_z(\alpha)\, R_z(\beta) = R_z(\beta)\, R_z(\alpha)$ (TD) $SO(3)$ non-abélien

III.6 Changement de Base, des matrices similaires et équivalentes

Rappel: E $\mathbb{R}$-e.v. de dim n

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base ds. E.

$\exists$ isomorphisme $\varphi_{\mathcal{B}} : E \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$

$\varphi_{\mathcal{B}}(b_1) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\varphi_{\mathcal{B}}(b_n) = e_n$

Exple: 1) $E = \mathbb{R}_2[X]$

base canonique $\mathcal{E} = (1, X, X^2)$

$\varphi_{\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 \in \mathbb{R}^3$, $\varphi_{\mathcal{E}}(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_{\mathcal{E}}(X^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

en conséquence $\swarrow \varphi_{\mathcal{E}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$

$\varphi_{\mathcal{E}}(a\cdot 1 + b\cdot X + c\cdot X^2) = a\cdot \varphi_{\mathcal{E}}(1) + b\cdot \varphi_{\mathcal{E}}(X) + c\cdot \varphi_{\mathcal{E}}(X^2)$

$= a\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Rappel: (notation)

$x \in E$

$\varphi_{\mathcal{B}}(x) \overset{\text{déf}}{=} [x]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$

$\varphi_{\mathcal{E}}(x) = [x]_{\mathcal{E}}$

Ici, $P = a\cdot 1 + b\cdot X + c\cdot X^2 \in \mathbb{R}_2[X] = E$

$\varphi_{\mathcal{E}}(P) \equiv [P]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Exple: 2) $E = \mathbb{R}_2[X]$ $\mathcal{B} = (1, X, X^2+3X-5)$

$\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}_2[X] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ $\varphi_{\mathcal{B}}(\underbrace{X^2+3X-5}_{b_3}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\varphi_{\mathcal{B}}(\underbrace{a\cdot 1 + b\cdot X + c\cdot X^2}) = \varphi_{\mathcal{B}}((a+5c)\cdot b_1 + (b-3c)\cdot b_2 + c\cdot b_3) = \begin{pmatrix} a+5c \\ b-3c \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$(a+5c)\cdot \underset{b_1}{1} + (b-3c)\underset{b_2}{X} + c\cdot(\underset{b_3}{\boxed{X^2+3X-5}})$

$\varphi_{\mathcal{B}}(P) = \underbrace{\begin{pmatrix} a+5c \\ b-3c \\ c \end{pmatrix}}_{[P]_{\mathcal{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice de passage } M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{[P]_{\mathcal{E}}}$

(normalem^t notée $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$)

$\Rightarrow \boxed{[P]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \cdot [P]_{\mathcal{E}}}$

Rappel: $f \in \mathcal{L}(E, F)$ $\mathcal{B}$ base de E, $\mathcal{C}$ base de F

$\varphi_{\mathcal{B}} : E \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ $(\varphi_{\mathcal{B}} \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n))$

$\varphi_{\mathcal{C}} : F \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$

$\dim(E) = n$, $\dim(F) = m$

$\forall x \in E$, $[x]_{\mathcal{B}} \overset{\text{déf}}{=} \varphi_{\mathcal{B}}(x) \in \mathbb{R}^n$

$f \rightsquigarrow A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ t.q. $[x]_{\mathcal{C}} = A\cdot [x]_{\mathcal{B}}$

Notation: $A \overset{\text{déf}}{=} [f]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$

$\boxed{[x]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \cdot [x]_{\mathcal{B}}}$

une notation utile.

(toujours base à côté de la m̂ base).

Pour voir (comprendre) la situation graphiquement: chasse aux diagrammes.

On va dessiner toutes les applications de droite à gauche.

$$\begin{tikzcd} y \in F \arrow[d, "\varphi_E"', "\wr"] & E \ni x \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "\varphi_B", "\wr"'] \\ \mathbb{R}^m & \mathbb{R}^n \ni [x]_B \ (\overset{\text{déf}}{=} \varphi_B(x)) \arrow[l, "{[f]_{EB}}"'] \end{tikzcd}$$

$[y]_E$ $\quad \uparrow \varphi_B^{-1}$

si $y = f(x)$
alors $[y]_E = [f]_{EB} \cdot [x]_B$

$\left(f_{EB} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ M_n \mapsto [f]_{EB} \cdot [x]_B\right)$

Notation: $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ x \longmapsto A \cdot x$

$$\mathbb{R}^m \xleftarrow{\ \Phi\ } \mathbb{R}^n \underset{\text{notation}}{\equiv} \mathbb{R}^m \xleftarrow{\ A\ } \mathbb{R}^n$$

chasse de diagramme
$$f_{EB} = \varphi_E \circ f \circ (\varphi_B)^{-1}$$

Aussi Rappel:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\varphi_D"] & F \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "\varphi_E"] & E \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "\varphi_B"] \arrow[ll, bend right, "f \circ g"'] \\ \mathbb{R} & \mathbb{R}^m \arrow[l, "{[f]_{DE}}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[l, "{[g]_{EB}}"'] \arrow[ll, bend left, "{[f\circ g]_{DB}}"] \end{tikzcd}$$

$$[f \circ g]_{DB} \overset{\text{CM}}{=} [f]_{DE} \cdot [g]_{EB}$$

⚠ Diagramme droite à gauche!

III.6.1 Matrice de Passage

$\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ bases de E

(Δ)
$$\begin{tikzcd} & E \ni x \arrow[dl, "\varphi_{\tilde{B}}"', "\wr"] \arrow[dr, "\varphi_B", "\sim"'] & \\ {[x]_{\tilde{B}}} \in \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^n \ni [x]_B \arrow[ll, "P_{\tilde{B}B}"'] \end{tikzcd}$$

φ_B^{-1}

la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\tilde{\mathcal{B}}$.

langues: chinois, Anglais, Français

Par chasse au diagramme:
si $\Phi_{\tilde{B}B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ [x]_B \longmapsto P_{\tilde{B}B}\, [x]_B$

alors $\Phi_{\tilde{B}B} = \varphi_{\tilde{B}} \circ \varphi_B^{-1}$

en conséquence $\Phi_{\tilde{B}B}\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme.
(en tant que composée de deux isomorphismes)

alors $P_{\tilde{B}B} \in GL(n, \mathbb{R}) \equiv \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det M \neq 0 \}$

Rq: $\Phi_{\tilde{B}B} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n) \cong GL(n, \mathbb{R})$

Aussi réciproquement : $\forall P \in GL(n)$ ça donne une changement de base $\mathcal{B}$ ds E.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\varphi_{\tilde{B}}"'] \arrow[dr, "\varphi_B"] & \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^n \arrow[ll, "P"', "\Phi_P"] \end{tikzcd}$$

alors $\exists!\ \varphi_{\tilde{B}} : E \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$

$\varphi_{\tilde{B}} = \Phi_P \circ \varphi_B$

et $\exists!$ base $\tilde{\mathcal{B}} := \left(\varphi_{\tilde{B}}^{-1}(e_1), \dots, \varphi_{\tilde{B}}^{-1}(e_n)\right) \equiv$
ds E $\quad = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n)$

Point de vue alternatif sur (Δ) (et la matrice de passage)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\varphi_{\tilde{B}}"'] & E \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\varphi_B"] \\ \mathbb{R}^n & \mathbb{R}^n \arrow[l, "P_{\tilde{B}B}"'] \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{Lemme: } P_{\tilde{B}B} = [\mathrm{id}]_{\tilde{B}B}}$$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "\varphi_E"'] \arrow[dd, bend right=50, "\varphi_{\tilde{E}}"'] & E \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "\varphi_B"] \arrow[dd, bend left=50, "\varphi_{\tilde{B}}"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[d, "P_{\tilde{E}E}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[l, "{[f]_{EB}}"'] \arrow[d, "P_{\tilde{B}B}"] \\ \mathbb{R}^n & \mathbb{R}^n \arrow[l, "{[f]_{\tilde{E}\tilde{B}}}"'] \end{tikzcd}$$

(□)

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\varphi_{\tilde{B}}"'] \arrow[dr, "\varphi_B"] & \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^n \arrow[ll, "P_{\tilde{B}B}"'] \end{tikzcd}$$

pour connaître la relation entre les matrices $[f]_{EB}$ et $[f]_{\tilde{E}\tilde{B}}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[d, "P_{\tilde{E}E}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[l, "{[f]_{EB}}"'] \arrow[d, "P_{\tilde{B}B}"] \\ \mathbb{R}^m & \mathbb{R}^n \arrow[l, "{[f]_{\tilde{E}\tilde{B}}}"'] \end{tikzcd}$$

$$\Longrightarrow [f]_{\tilde{E}\tilde{B}} = P_{\tilde{E}E} \cdot [f]_{EB} \cdot (P_{\tilde{B}B})^{-1}$$

et car $(P_{\tilde{B}B})^{-1} = P_{B\tilde{B}}$

$$\boxed{[f]_{\tilde{E}\tilde{B}} = P_{\tilde{E}E} \cdot [f]_{EB} \cdot P_{B\tilde{B}}}$$

aussi : $\forall P \in GL(n),\ Q \in GL(m)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m & \mathbb{R}^n \arrow[l, "A"'] \\ \mathbb{R}^m \arrow[from=u, "\wr\ Q"'] & \mathbb{R}^n \arrow[l, "B"] \arrow[from=u, "\wr\ P"] \end{tikzcd}$$

$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}$

$\boxed{B = Q\cdot A\cdot P^{-1}}$

III.6.2 Des matrices équivalentes et/ou similaires.

$A \sim B$

Déf: 1) $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}$ sont appelées **équivalentes** ssi $\exists P \in GL(n),\ Q \in GL(m)$ t.q. $\boxed{B = Q\cdot A\cdot P^{-1}}$.
2) $A, B \in \mathcal{M}_n$ sont appelées **similaires** ssi $\exists P$: $\boxed{B = P^{-1}.A.P}$

$A \simeq B$

Prop: $A, B \in \mathcal{M}_n$: $A \simeq \implies A \sim B$

$\not\Longleftarrow$ en générale

(Preuve $\overset{A\simeq B:}{\exists Q : B = Q\cdot A\cdot Q^{-1}}$ prenr $P = Q$)

Thm: $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $rg(A) = r \leq \min(m,n)$

alors $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Corollaire: La seule invariante sous l'équivalence des matrices et leur rang.

Lemme: $A, B \in \mathcal{M}_n$, $A \simeq B$
$\implies tr(A) = tr(B)$

Preuve: $B = P^{-1}\cdot AP$, $tr(B) = tr(P^{-1}\cdot A\cdot P) = tr(A\underbrace{P\cdot P^{-1}}_{\mathbb{1}}) = tr\,A$ $\square$.

Exple: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

alors $A \sim B$, mais $A \not\simeq B$ car $tr\,A = 5$, $tr\,B = 2 \neq 5$

Corollaire: $\forall f \in \mathcal{L}(E,F)$ comme ds $(\square)$: $\exists$ base $\tilde{\mathcal{B}}$ et $\tilde{\mathcal{C}}$ t.q. $[f]_{\tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{B}}} = \overset{r}{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots 1 & \\ 0 & & 0\ 0 \end{pmatrix}}$ $(r = rg(f))$

$f \in End(E)$ $\mathcal{B}$ une base de E

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dd, bend right=40, "\varphi_{\tilde{\mathcal{B}}}"'] & E \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dd, bend left=40, "\varphi_{\tilde{\mathcal{B}}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[d, "P_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}"] & \mathbb{R}^n \arrow[l, "A = [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}"'] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "P_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{R}^n & \mathbb{R}^n \arrow[l, "\mathcal{B} = [f]_{\tilde{\mathcal{B}}}"] \end{tikzcd}$$

$\implies B = [f]_{\tilde{\mathcal{B}}} = P_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}\cdot \overbrace{[f]_{\mathcal{B}}}^{A}\cdot P_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$

$B = P^{-1}\cdot A\cdot P \implies A \simeq B$
si $P = P_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$

Déf: Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est appelée **diagonale** ssi'l $\exists$ une matrice $D \in \mathcal{M}_n$, diagonale t.q. $A \simeq D$.