20/04
Gricey
ALGÈBRE 2

III.5 (continuation)

III.5.1 Des projections et symétries linéaires (cond.)

$p \in End(E)$, $p^2 = p$ … p une ~~projection~~

$s \in End(E)$, $s^2 = id$ s une symétrie linéaire.

$E = F \oplus G$, $\forall x \in E : \exists!\ u \in F,\ v \in G$ t.q. $x = u + v$ $\longrightarrow$ $p_F \in End(E)$, $p_F(x) = u$

$p_G \in End(E)$, $p_G(x) = v$

p_F … un projecteur sur F parallèlement à G.

Rq:
1) $p_F + p_G = id_E$
2) p_F ne dépend pas seulemt de F, mais aussi du choix dim supplemt de G.

Prop:
1) p_F est une projection
2) p est un projecteur sur l'image $im(p)$ de p, parallèlement au noyau $Ker\, p$, de p.

Preuve:

1) $\forall x \in E$, $x = u + v$, $u \in F$ et $v \in G$

$$\left.\begin{array}{l} p_F(x) \overset{déf}{=} u \\ \Rightarrow p_F(u) = u \end{array}\right\} \boxed{p_F^2(x) =} p_F(\underbrace{p_F(x)}_{u}) = u = \boxed{p_F(x)} \quad \text{alors } \boxed{p_F^2 = p_F} \qquad \square.$$

2) **Rappel:** $f \in End(E)$

tjs $Ker\, f \subseteq E$, $im\, f \subseteq E$

Prop: $Ker\, f + im\, f = E \iff Ker\, f + im\, f = Ker\, f + im\, f = Ker\, f \oplus im\, f$

$\Updownarrow$

$Ker\, f \cap im\, f = \{0\}$

$\rightsquigarrow$ Alors une projection p et un projecteur p_F (sur $F /\!/ G$) st "la m̂ chose".

En particulier $p_F(x) = p_F(u + v) = u$

où $u \in F$, $v \in G$

alors $im(p_F) = F$ et $Ker(p_F) = G$.

Lemme: $Ker\, p + im\, p = Ker\, p \oplus im\, p = E$

Preuve: (Lemme): pour démontrer le lemme il suffit d'établir $Ker\, p \cap im\, p = \{0\}$.

$\forall x \in Ker\, p \cap im\, p : \exists y \in E$ t.q.

$x = p(y)$ et $p(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow p(p(y)) = 0 \\ p^2(y) \overset{proj}{=} p(y) = x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0 \qquad \square.$$

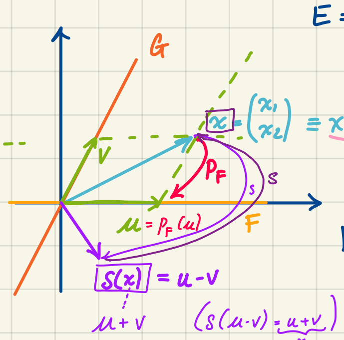
alors $\forall x \in E$ $\exists!\ u \in im\, p$, $v \in Ker\, p$ t.q. : $x = u + v$.

$$\left.\begin{array}{l} P_{imp}(x) \overset{déf}{=} u \\ \\ \text{il reste à mq } p(x) = u \end{array}\right\} \Rightarrow p = P_{imp}$$

mais $p(x) = p(u+v) \overset{lin}{=} \underbrace{p(u)}_{u} + \underbrace{p(v)}_{0} = u$ car $v \in Ker\, p$ $\square$.

Démo: de $p \sim p_F$ et $s = 2p - id$

$E = \mathbb{R}^2$, $F := Vect(e_1)$, $G := Vect(e_1 + 2e_2)$



$p_F(x) \neq x_1 e_1 \in F$

car $x_2 \cdot e_2 \notin G$

$\forall x \in E = \mathbb{R}^2$

$\exists!\ u \in F$, $v \in G$

t.q. $u + v = x$

et $p_F(x) = u$

ici $x = x_1 \cdot e_1 + \underbrace{x_2 \cdot e_2}_{\notin G}$

$= x_1 \cdot e_1 + \frac{1}{2} x_2 \cdot 2e_2$

$= \underbrace{(x_1 - \tfrac{1}{2} x_2)\, e_1}_{\in F} + \underbrace{\tfrac{1}{2} x_2 (e_1 + 2e_2)}_{\in G}$

alors $p_F(x) = u = (x_1 - \frac{1}{2} x_2)\, e_1 \equiv \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{2} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $p_G(x) = v = \frac{1}{2} x_2 (e_1 + 2e_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv x_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$(G = Vect\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix})$

III 5.2 Des rotations ds $\mathbb{R}^n$

"Une rotation est une application linéaire qui ne change pas le produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$."

En détail:

Rappel: 1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle\cdot|\cdot\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

2) $G = (G, \cdot)$ un groupe $\xrightarrow{t.q.}$ 1) $\forall g_1, g_2, g_3 \in G : (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ (associativité)

ensemble — multiplication (prod. interne)

2) $\exists e \in G$ t.q. $\forall g \in G : e \cdot g = g = g \cdot e$

3) $\forall g \in G \; \exists g^{-1} \in G : g^{-1} \cdot g = e = g \cdot g^{-1}$

Rq: Un groupe n'est pas forcém^t abélien (commutatif) en gén. $g_1 \cdot g_2 \neq g_2 \cdot g_1$

Condition minimale sur les éléments $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$

Déf:

1) $GL(\mathbb{R}, n) \equiv GL(n) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ le groupe linéaire (en dim n).

si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est compris

2) $SL(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n \mid \det A = 1\}$ **Rq:** $SL(n) \subset GL(n)$ (sous-groupe)

Rq: $GL(n)$ est non-abélien pour tout $n > 1$.

Déf:

1) $O(n) := \{R \in \mathcal{M}_n \mid \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle Rx | Ry \rangle = \langle x | y \rangle\}$ le groupe orthogonal (en dim n). ← les rotations propres et impropres (ou les rotations et les anti-rot.)

2) $SO(n) := \{R \in O(n) \mid \det R = 1\}$ ← l'ensemble des rotations propres

Prop:

1) $R \in \mathcal{M}_n : R \in O(n) \iff R^T \cdot R = \mathbb{1}$

2) $R \in O(n) \implies \det(R) \in \{+1, -1\}$

Rq: 1) $SO(n) \subset O(n)$

2) $SO(n)$ non-ab. $\iff n > 2$.

Corollaire: $O(n) = \{R \in \mathcal{M}_n \mid R^T \cdot R = \mathbb{1}\}$

Rq: $O(n, \mathbb{R}) \subset O(n, \mathbb{C})$

Preuve: • 1) ⟹ 2):

$$R^T \cdot R = \mathbb{1} \implies \det(R^T \cdot R) = \underbrace{\det(R^T)}_{\det(R)} \cdot \det(R) = (\det(R))^2 = \det(\mathbb{1}) = 1$$ $\square$. 2)

(continuat° (Preuve de 1)) la prochaine fois).

Exple: 1) $R \in SO(2) \iff \exists \alpha \in [0, 2\pi[$, t.q. $R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

2) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(2)$ mais $R \notin SO(2)$ ← une symétrie ($R^2 = R$) réflexion par rapport à $\{y = 0\}$.