Continuation III.3

6/04
Africay
ALG. 2

Rappel: E, F evs alors $f : E \to F$ lin $\iff \forall (u_1, \dots, u_k) \in E^k, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k : f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(u_i)$

$$S := \{x \in E \mid f(x) = b\}, \quad \operatorname{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} \underset{\text{sev}}{\subseteq} E$$

ensemble des solutions (de $f(x) = b$) pas de ev. (car $0_E \notin S$).

Ex. 1 $E := \mathbb{R}^3$, $F := \mathbb{R}^3$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ x + y + z \\ x + 3y + 5z \end{pmatrix}$

$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y \\ \dots \\ \dots \end{cases}$ (G) CM1

si $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \emptyset$, si $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $S \neq \emptyset$

Ex. 2 $\Psi : C^n(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$, $y \mapsto L[y]$ avec $L = \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$ une appl. lin., $b \in C^0(\mathbb{R})$

S... l'ensemble de solutions $L[y] = b$

Opérateur différentielle $(a_0, \dots, a_n) \in (C^0(\mathbb{R}))^n$ ou $\in \mathbb{R}^n$

Prop: 1) $S \neq \emptyset \iff b \in \operatorname{im}(f)$.

2) Soit $S \neq \emptyset$ et $x_p \in S$, alors $\forall x \in S \ \exists (!) \ x_h \in \operatorname{Ker} f$ t.q. $x = x_p + x_h$

Preuve:

1) Évident

2) $\left.\begin{matrix} f(x) = b \\ f(x_p) = b \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x - x_p) = 0$

$\Rightarrow x - x_p = x_h \in \operatorname{Ker}(f)$

Rq:

- Le 1) en pratique n'est pas important pour les éq's diff. ($\Leftarrow$ Thm. fond. d'analyse) ($y' = b \in C^0(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists y \in C^1(\mathbb{R})$).

Par contre, pour les systèmes lins. $A \cdot x = b$ c'est bien important.

$\to$ Ds ce cas, **Lemme:** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$

$$\boxed{b \in \operatorname{im}(f) \iff \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\underbrace{(A, b)}_{\text{matrice étendue}})}$$

Preuve: (Rappel)

1) $\operatorname{rg}(A) = \dim(\operatorname{im}(f))$

2) $\operatorname{im}(f) = \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ où $A = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ $(v_i \in \mathbb{R}^m)$

$\operatorname{rg}((A, b)) = \dim(\operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n, b))$

$\operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n) \underset{(\text{sev})}{\subseteq} \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n, b)$

et égalité ssi $b \in \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n) = \operatorname{im}(f)$ et aussi ssi les m̂ dims.

- Le 2) est particulièrement important pour des éqs. diff. x_p solution particulière, x_h solution homogène. Mais un peu aussi pour $A \cdot x = b$.

Par exple: $\dim(\operatorname{Ker} A)$ est le nombre de paramètres ds la solution générale.

Ex. 1

$b = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ CM1 $\quad A x = b \iff x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

Syst G du CM1

Rq: Normalem^t X_p n'est pas facile à trouver ds. les syst. lin. $Ax = b$, mais $\operatorname{im} f \equiv \operatorname{im} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$

Thm du rang: $\operatorname{rg}(f) \equiv \dim(\ ) = 3 - \underbrace{\dim(\operatorname{Ker} A)}_{1} = 2$

alors: $\operatorname{im}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Alors ici on a : $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{im}(f)$ car $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \notin \mathrm{im} f$ $\left(\text{p.e. car } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \text{, Rq. similairement } \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} \notin \mathrm{im} f \right)$

pour les eq's diff. il existe la méthode de la variation de la constante.

Corollaire: Soit $f \in \mathrm{im}(f)$, alors on a : $\exists$ sol. unique de $f(x) = b$ $(\Leftrightarrow |S| = 1)$
$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.

Continuation III.4 $\longleftarrow$ toujours $\dim(E) = n \in \mathbb{N}$

Rappel: Lemme $\hookrightarrow E \cong \mathbb{K}^n$

Lemme: $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ base de E, alors $\varphi_{\mathcal{B}} : E \to \mathbb{K}^n$, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i \mapsto \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}$ est une bijection alors un iso
$(\varphi_{\mathcal{B}} : E \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n)$

Rq: λ_i est unique

Notation: Souvent on écrit simplement x_i pour les $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$$

et on écrit $[x]_{\mathcal{B}}$ pour $\varphi_{\mathcal{B}}(x) \in \mathbb{K}^n$ ou si l'on ne change pas la base $\mathcal{B}$ simplement $\underline{x}$.
$(\boxed{\varphi_{\mathcal{B}}(x) = [x]_{\mathcal{B}} = \underline{x}}$ $\quad x \in E,\ \underline{x} \in \mathbb{K}^n$, $\varphi_{\mathcal{B}} : E \to \mathbb{K}^n, x \mapsto \underline{x})$

Notation plus simple (de gauche à droite)

en plus : si déjà $E = \mathbb{K}^n$
alors on va souvent identifier x et $\underline{x}$.
Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$
Mais en générale $E \neq \mathbb{K}^n$,
p.e. $E = \mathbb{K}_n[X]$
(on a qd m̂ $E \cong \mathbb{K}^n$, mais
x est un polynôme ds ce cas
et $\underline{x}$ est un vect. (vect. en colonne = une matrice de taille n fois 1) ds. $\mathbb{K}^n$.)

Exple: $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ base canonique de E ici.

$\varphi_{\mathcal{B}}(P(X)) = \boxed{\varphi(a \cdot 1 + b X + c \cdot X^2) = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}_2[X] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$

On pense "difficile" en tant que dictionnaire. "simple"

La dernière fois $f\ E \to F$ et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E
$\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ —— " —— F.

On a défini une matrice A associée à f (et les deux bases)
par la formule $f(b_i) = \sum_{j=1}^{m} A_{ji} c_j$ $\left(\begin{array}{l} \text{p.e. } f(b_1) \in F \Rightarrow \exists (\lambda_1, \ldots \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \text{ t.q. } f(b_1) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot c_j \\ \phantom{\text{p.e. }} f(b_2) \in F \Rightarrow \exists (\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_m) \in \mathbb{R}^m \text{ t.q. } f(b_2) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{\lambda}_j \cdot c_j \end{array} \right)$

Notation efficace A_{j1} ||
différente !
|| A_{j2} etc.

Alors $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Notation: $A \equiv [f]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \equiv \underline{f}$

Prop: Soit $f, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, et avec tout comme ci-dessous, alors $y = f(x) \Longleftrightarrow \underline{y} = A \cdot \underline{x}$
$(\forall x \in E)$ mult. matricielle.

Preuve: $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$, $\Rightarrow y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(b_i)$
f lin. $\qquad = \sum_{j=1}^{m} A_{ji} \cdot c_j$

alors $\boxed{y = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} A_{ji} c_j = \sum_{j=1}^{m} \boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} A_{ji} \cdot x_i \right)} c_j}$

mais à l'autre côté on a $\boxed{y = \sum_{j=1}^{m} y_j c_j}$

la décomposition d'un vecteur (ici y) ds une base étant unique on trouve : $y_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ji} x_i$ $(\forall j = 1, \ldots, m)$
et alors, par déf. de la mult. des matrices, $\underline{y} = A \cdot \underline{x}$ $\square$.

Prop: $f : E \to F$, $g : G \to E$
$\mathcal{B}$ $\quad \mathcal{C}$ $\quad \mathcal{D}$ ... des bases.
et $A = [f]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$, $B = [g]_{\mathcal{B}\mathcal{D}}$
alors pour $h = f \circ g : G \to F$ la matrice satisfait $\boxed{C = [h]_{\mathcal{C}\mathcal{D}} = A \cdot B}$

Preuve: $h(x) = f(g(x)) \iff C\cdot \underline{x} = A\cdot(B\cdot \underline{x})$ $\square$.

$\forall x \in G$

$(h(x) =)\ C\cdot \underline{x}$ $\quad A\cdot g(x)$, $g(x) = B\cdot x$

Notation: $\underline{y} = A\cdot \underline{x}$, la m̂ chose que $\boxed{[y]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\cdot[x]_{\mathcal{B}}}$

$z := h(x)$ $\quad [z]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\cdot[g]_{\mathcal{B}\mathcal{D}}\cdot[x]_{\mathcal{D}}$

tjs à côté!

- **Pourquoi utile?**
  1) Traduire les problèmes abstraits aux problèmes matricielles, pour y répondre ("dictionnaire : difficile $\to$ simple")
  2) Choisir des bases adaptés à une app. $f: E\to F$ t.q. la matrice $A = [f]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ est simple ds un choix de bases A compliqué ds une autre A très simple (p.e. diagonale!) $\Big\}$ utile m̂ si $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$

Exple: pour 2): plus tard mais cf. aussi exercice 25 de la fiche 1)

pour 1): $\Psi: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto (2+2X)P + (3-X-2X^2)P' + (1-X+X^3)P''$, à vous Ψ est bien déf. et lin. but: déterminer $\operatorname{Ker}(\Psi)$ et $\operatorname{im}(\Psi)$!

On traduit tout en pb. matricielle pour les bases canonique $(1, X, X^2)$ et $(1, X, X^2, X^3)$ respectivement.

$P = aX^2 + bX + c1 \xleftrightarrow{\mathcal{L}_{\mathcal{B}}} \begin{pmatrix} c\\ b\\ a\end{pmatrix} = \underline{P}$, $\quad Q := \Psi(P)$, $\quad \Psi \leftrightarrow A$

$\underline{Q}$ $\quad (\underline{Q} = A\cdot \underline{P})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\Psi(X) = (2+2X)X + (3-X-2X^2)\cdot 1 + 0$

$\Psi(X^2)$

$\Psi(1) = 2+2X$

- Maintenant calculer $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -5\\ 2\\ 2\end{pmatrix}\right)$

Polynôme 1

polynôme X

$$\boxed{\operatorname{im} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)}$$

alors (on utilise φ^{-1})

$\operatorname{Ker}\Psi = \operatorname{Vect}((-5+2X+2X^2)) \equiv \{\lambda(-5+2X+2X^2), \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\operatorname{Im}\Psi = \operatorname{Vect}(1, X) \equiv \{\alpha.\beta X \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

III.5 Des endomorphismes importants

III.5.1 Des projections et symétries linéaires :

Déf: $f \in \operatorname{End}(E)$

1) f idempotente si $\boxed{f^2 = f}$ $(f^2 \equiv f\circ f)$. Dans ce cas on appelle f une projection.

2) f involutive si $f^2 = \mathrm{id}$, f une symétrie.

identité

$(\mathrm{id} = \mathrm{id}_E : E \to E,\ x \mapsto x)$

Prop: Soit $p \in \operatorname{End}(E)$

1) $\tilde{p} \underset{(*)}{:=} \mathrm{id} - p$ est une projection $\iff$ p une projection.

$(\tilde{p}^2 = \tilde{p}^2 \iff p^2 = p)$

2) $s := 2p - \mathrm{id}$ est une symétrie $\iff$ p projection.

$\left(\iff p = \frac{s+\mathrm{id}}{2}\right)$ $\quad (s^2 = \mathrm{id} \iff p^2 = p)$

Preuve:

1) $\tilde{p}^2 = (\mathrm{id}-p)^2 \equiv \underbrace{\underbrace{\mathrm{id}^2}_{\mathrm{id}} - \underbrace{\mathrm{id}\circ p}_{p} - \underbrace{p\circ \mathrm{id}}_{p}}_{\tilde{p}} + p^2$

$(*) \Rightarrow \tilde{p}^2 = \tilde{p} + (p^2 - p)$

2) En TD.

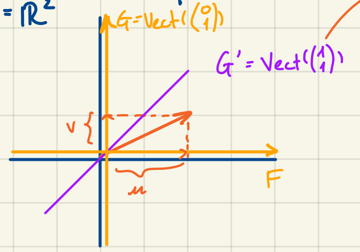
Rappel: Si $E = F \oplus G$ alors $\forall x \in E$
$\exists!\ u \in F,\ v \in G$ t.q. $x = u + v$

Rq: Soit $E = F \oplus G$. et $E \ni x = u + v$, $u \in F$, $v \in G$,
alors l'appl. $P_F : E \to E,\ x = u + v \mapsto u$ est appelé
un projecteur sur F parallèlement à G.

Rq: $P_G := id - P_F$ est un proj. sur G // à F (et $P_F + P_G = id$)

Prop:
1) P est une projection ($\Leftrightarrow P_F^2 = P_F$)
2) Soit p une projection ($p^2 = p$), dn p est un projecteur sur $im(p)$ parallèlement à son noyau $\ker(p)$.

Preuve: Géométriquement / Exple:
$E = \mathbb{R}^2$



$(P_F(x) = P_F(u+v) = u)$
càd $\left|\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right.$

$$\boxed{P_F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$P_G = id - P_F : P_G\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$

P'_F proj sur F // à G'
(P_F — " — // à G)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{} + \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\in G'}$$

alors $\boxed{P'_F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix}}$