Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre de printemps 2022-2023**

L1 Math-Info — UE : Algèbre 2

Examen final - 10 mai 2023, 14h

Durée 2H

Avertissement : *Une attention particulière sera prêtée à la qualité de la rédaction. Sauf mention contraire, toute réponse doit être justifiée. Tous les appareils électroniques sont interdits. Le barème est donné à titre* **indicatif**.

Exercice 1. (6 pts)

Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (2.5 pts) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. (1 pt) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.
3. (0.5 pts) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, exprimer (sans preuve) la matrice D^n.
4. (1 pt) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. (1 pt) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Exercice 2. (10 pts)

On note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ tel que :

$$f(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad f(e_2) = 3e_2, \quad f(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. (0.5 pts) Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ représentative de f dans la base $\mathcal{E}$.
   Pour les étudiants de l'amphi d'info : c'est-à-dire déterminer la matrice $A \equiv [f]_{\mathcal{E}}$.
2. (1.5 pt) Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. (0.5 pts) f est-elle injective ?
4. (0.5 pts) Déterminer le rang de f.
5. (0.5 pts) f est-elle surjective ?
6. (1 pt) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
7. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$.
   (a) (1 pt) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
   (b) (1 pt) Déterminer une base de G.
   (c) (1 pt) Démontrer que $\ker(f)$ et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
8. Soit v_1, v_2 et v_3 les trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$ définis par :

   $$v_1 = (2, 0, -1),\ v_2 = (1, 0, -1),\ v_3 = (0, 1, 0).$$

   (a) (1.5 pts) Montrer que $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
   (b) (0.5 pts) Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$.
   (c) (0.5 pts) Déterminer $B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$
   (*c'est-à-dire $B \equiv [f]_{\mathcal{B}}$ avec les notations de l'amphi d'info*).

Exercice 3. (5 pts) On note $\mathcal{E} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$.
On considère l'application $\Psi \colon \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$, $P(X) \longmapsto XP'(X) - P(X+1)$.

1. (1 pt) Montrer que Ψ est une application linéaire.
2. (1 pt) Déterminer A la matrice représentative de Ψ dans la base $\mathcal{E}$ (*c'est à dire* $A \equiv [\Psi]_{\mathcal{E}}$ *avec les notations de l'amphi d'info*).
3. (1.5 pts) Déterminer $\ker(\Psi)$.
4. (0.5 pts) Quel est le rang de Ψ ?
5. (1 pt) Donner une base de $\mathrm{Im}(\Psi)$.