Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre printemps 2023**
L1 | UE : Algèbre 2 (INFO)

Examen partiel du 21 avril 2022

Durée : 60 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Le nombre total de points obtenus formera une note sur 20 !

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf indication contraire.

Exercice 1 (10 pts)

Soit $f\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], P \mapsto f(P)$ où

$$f(P) = 2XP' + P(1)X^2.$$

a. (2 pts) Montrer que f est une application linéaire.

b. (3 pts) Trouver la matrice A qui correspond à f dans la base $\{1, X, X^2\}$.

c. (3 pts) Déterminer $\ker A$ et $\mathrm{im}A$.

d. (2 pts) En déduire $\ker f$ et $\mathrm{im}f$.

Exercice 2 (8 pts)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $x \mapsto Ax$.

a. (4 pts) Déterminer une base de $\ker f \equiv \ker A$ et sa dimension.

b. (2 pts) Déterminer une base de $\mathrm{im}f \equiv \mathrm{im}A$ et sa dimension.

Indication : Vous pouvez déterminer le rang de f d'abord et l'utiliser pour trouver une base.

c. (2 pts) Montrer que $\ker f + \mathrm{im}f = \mathbb{R}^4$.

Exercice 3 (5 pts)

Pour chacun des ensembles suivants, indiquer s'il s'agit d'un espace vectoriel. (Justifier)
Si oui, en donner une base. (Pas besoin de justifier ici, il suffit de donner une base)

a. $E = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | A^T = -A\}$.

b. $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | A_{1,1} = A_{2,2}\}$.

c. $G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | A_{1,1} \geq A_{2,2}\}$.

Rappel sur la notation : Dans l'exemple qui suit, $M_{2,1}$ est la case en bas à gauche de M, et vaut donc 3. La transposée de M, notée M^T, est sa symétrique.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, M^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$