Exercice 1

Il suffit de vérifier si ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ou non.

a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 0\}$

- $(0,0,0) \in A$? $\quad 0^2 + 0^2 + 0^2 = 0 \geq 0 \Rightarrow (0,0,0) \in A$
- soient $u, v \in A$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $u = (x, y, z)$ et $v = (a, b, c)$

  $u + \lambda v \in A$?

  $(x+\lambda a)^2 + (y+\lambda b)^2 + (z+\lambda c)^2 \geq 0 \quad \forall (x,y,z), (a,b,c)$ en tant que somme de carrés

Donc A est bien un espace vectoriel

b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 0\}$

- $0^2 + 0^2 + 0^2 = 0$ donc $(0,0,0) \notin B$

B n'est pas un espace vectoriel

c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 0\}$

On remarque $C = \{(0,0,0)\}$

C'est bien un espace vectoriel.

d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 0\}$

$D = \emptyset$

$(0,0,0) \notin \emptyset$

D n'est pas un espace vectoriel.

e) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$

- $(0,0,0) \notin E$ car $0^2 + 0^2 + 0^2 = 0 < 1$

Ce n'est pas un espace vectoriel.

f) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

- $(0,0,0) \in F$
- $(1,1,1) \in F$ mais $(1,1,1) + (1,1,1) = (2,2,2) \notin F \quad (2^2 + 2^2 + 2^2 = 12 > 1)$.

F n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 2

a) $\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^5 : Ax = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

Soit $x \in \mathbb{R}^5$, $Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 10 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 \\ \cancel{-x_2} + 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 + \cancel{x_2} + 10x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \\ -\cancel{2x_2} + 4x_3 - 6x_4 - 4x_5 + \cancel{2x_2} + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 \\ 12x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 0 \iff 6x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 6x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

ces deux lignes sont équivalentes

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 \\ x_3 = \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + \frac{2}{3}x_4 + x_5 - 3x_4 - 2x_5 = -x_2 - \frac{7}{3}x_4 - x_5 \\ x_3 = \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \end{cases}$$

Donc $x = \begin{pmatrix} -x_2 - \frac{7}{3}x_4 - x_5 \\ x_2 \\ \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -7/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Une base de ker A est donc : $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) Déterminons le rang de A :

$$\begin{array}{l} \\ -1 \\ -2 \end{array}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 10 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$-\frac{1}{2}$; $\times \frac{1}{12}$

Donc $rg(A) = 2$

Pour avoir une base de $im(A)$, on prend deux colonnes non-colinéaires de A :

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ forme bien une base de $im(A)$.

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 4 - 2\times(-1) \\ 2\times 3 - 1\times 4 \\ 1\times(-1) - 1\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ forme cartésienne de $im(A)$: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 6x + 2y - 4z = 0\}$

Exercice 3

a) • $P(X) = 0 \ \forall X$, $P(0) = 0$ ✓, $P'(X) = 0$, $P'(1) = 0$ ✓

Donc $0 \in F$

• soient $P, Q \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On regarde $P + \lambda Q$. $(P+\lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0) = 0$

$(P+\lambda Q)'(1) = P'(1) + \lambda Q'(1) = 0$

Donc F est bien un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Soit $P \in F \Rightarrow P \in \mathbb{R}_3[X]$ donc $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$P'(X) = 3aX^2 + 2bX + c$

- $P(0) = 0 \iff d = 0$
- $P'(1) = 0 \iff 3a + 2b + c = 0 \iff c = -3a - 2b$

Donc $P(X) = aX^3 + bX^2 - (3a + 2b)X = a(X^3 - 3X) + b(X^2 - 2X)$

Une base de F est donc $\{X^3 - 3X, X^2 - 2X\}$

c) $F + G = \mathrm{Vect}\{X^3 - 3X, X^2 - 2X, X^3 - X - 1, X^2 + 1\}$

Regardons si ces vecteurs sont linéairement indépendants :

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$: $\alpha(X^3 - 3X) + \beta(X^2 - 2X) + \gamma(X^3 - X - 1) + \delta(X^2 + 1) = 0$

$$\iff (\alpha + \gamma)X^3 + (\beta + \delta)X^2 + (-3\alpha - 2\beta - \gamma)X + (\delta - \gamma) = 0$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ -3\alpha - 2\beta - \gamma = 0 \\ \delta - \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = -\gamma \\ 3\gamma + 2\gamma - \gamma = 0 \\ \delta = \gamma \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

C'est bien une base de $F + G \Rightarrow \dim(F + G) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X]) \Rightarrow F + G = \mathbb{R}_3[X]$

Soit $P \in F \cap G \Rightarrow P(X) = a(X^3 - 3X) + b(X^2 - 2X)$ car $P \in F$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow P(X) = c(X^3 - X - 1) + d(X^2 + 1)$ car $P \in G$, $c, d \in \mathbb{R}$

$$a(X^3 - 3X) + b(X^2 - 2X) = c(X^3 - X - 1) + d(X^2 + 1)$$

$$\iff \begin{cases} a = c \\ b = d \\ -3a - 2b = -c \\ 0 = d - c \end{cases} \iff \begin{cases} a = c \\ b = c \\ -3a - 2c = -c \\ d = c \end{cases} \iff a = b = c = d = 0 \Rightarrow P \equiv 0.$$

On a bien $F \cap G = \{0\}$

Donc $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 4

a) On remarque que $1 \notin E$: si $P(X) = 1 \ \forall x$, $P'(X) = 0 \ \forall X \Rightarrow P(0) \neq P'(0)$.

Donc F ne forme pas une base de E.

b) $1 + X \in E$ et $X^2 \in E$.

Si $P \in E$, $P(X) = aX^2 + bX + c$, $P'(X) = 2aX + b$

$P'(0) = P(0) \Rightarrow b = c$

$\Rightarrow P(X) = aX^2 + b(X + 1)$

F forme bien une base de E.

c) Reprenons P comme décrit ci-dessus:

$$\begin{aligned} P(X) = aX^2 + b(X+1) &= aX^2 + bX^2 - bX^2 + b(X+1) \\ &= (a - b)X^2 + b(X^2 + X + 1) \\ &= \frac{a-b}{2} \cdot 2X^2 + b(X^2 + X + 1) \\ &= c \cdot 2X^2 + b(X^2 + X + 1) \quad \text{avec } c = \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

F est bien une autre base de E.

d) Regardons si F est une famille libre. Si c'est le cas, ce sera une famille libre maximale dans $\mathbb{R}^3$ et donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+c=0\\ 2a+b+c=0\\ 3a+3b+2c=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2b-c\\ -4b-2c+b+c=0\\ -6b-3c+3b+2c=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2b-c\\ -3b-c=0\\ -3b-c=0\end{cases}$ } Les deux lignes sont équivalentes

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2b+3b=b\\ c=-3b\end{cases}$

On a bien $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Ce n'est pas une famille libre donc F n'est pas une base de E.

e) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$

$(x,y,z)\in E \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\x+y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \dim E=2$

Or $\dim F=3$ et F n'est dans tous les cas toujours pas une famille libre.
F n'est pas une base de E.

f) Regardons si F est libre ou pas :
soient $a,b,c,d\in\mathbb{R}$,
$$a\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2&3\\2&4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=0\\ a+2b=0\\ a+3b+c=0\\ a+4b+3d=0\end{cases}$ } ces deux lignes sont équivalentes $\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2b\\ -2b+3b+c=0\\ -2b+4b+3d=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2b\\ c=-b\\ d=\frac{-2}{3}b\end{cases}$

On a effectivement $-2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3\\2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.
Ce n'est pas une famille libre. Donc $\dim F\leq 3$ or $\dim(M_2(\mathbb{R}))=4$
Donc F n'est pas une base de $M_2(\mathbb{R})$.