Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre printemps 2023**
L1 UE : Algèbre 2 (INFO)

Examen partiel du 21 mars 2022

Durée : 60 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf indication contraire.

Questions de cours (2 pts)

a. (1 pt) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} := (u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Quelles sont les conditions pour que $\mathcal{F}$ forme une base de E (leur nom et leur formulation concrète).

b. (1 pt) Énoncer le théorème de Grassmann.

Des exercices sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 (2 pts)

Est ce un espace vectoriels ? Répondre uniquement par **oui** ou **non**, sans preuve.
(6 réponses correctes donnent 2 points, 5 donnent 1.5 points, 4 donnent 1 point, sinon 0 point).

a. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 0\}$

b. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 > 0\}$

c. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 0\}$

d. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 0\}$

e. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$

f. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$

Exercice 2 (7 pts)

Soit A la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 10 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a. (3 pts) Déterminer une base de $\ker A$ et sa dimension.

b. (2 pts) Déterminer une base de $\mathrm{im}A$ et le rang de A.
Indication : Vous pouvez déterminer le rang de A d'abord et l'utiliser pour trouver une base.

c. (2 pts) Donner des équations cartésiennes de $\mathrm{im}A$.

Tourner la page.

Des exercices sur l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{R}_n[X]$ et/ou des bases

Exercice 3 (6 pts)
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(0) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \text{Vect}(X^3 - X - 1, X^2 + 1)$$

a. (2 pts) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. (2 pts) Déterminer une base de F.
Indication : Quelles sont les équations à satisfaire pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ telles que $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in F$?

c. (2 pts) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 4 (3 pts)
Dans la suite, E est toujours un espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs dans E. Dire si $\mathcal{F}$ forme une base de E ou non. Répondre uniquement par **oui** ou **non**, sans preuve.
(6 réponses correctes rapportent 3 points, 5 réponses correctes rapportent 2 points, 4 réponses rapportent 1 point, sinon aucun point).

a. Soient $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P'(0) = P(0)\}$ et $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$.

b. Soient $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P'(0) = P(0)\}$ et $\mathcal{F} = (1 + X, X^2)$.

c. Soient $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P'(0) = P(0)\}$ et $\mathcal{F} = (2X^2, X^2 + X + 1)$.

d. Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = ((1, 2, 3), (2, 1, 3), (1, 1, 2))$.

e. Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $\mathcal{F} = ((1, 2, 3), (2, 1, 3), (1, 1, 2))$.

f. Soient $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right)$.