Correction contrôle continu 1 Version 2

Raphaël Heng

10 mars 2023

1 Question de cours

Rappeler les trois opérations élémentaires sur les lignes dans l'algorithme de Gauss et préciser le comportement du déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ pour chacune d'elles.

Pour i, j des numéros de lignes, tels que $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $L_i \leftrightarrow L_j$: $\det(A)$ devient $-\det(A)$.
2. $L_i \leftarrow \lambda L_i$: $\det(A)$ devient $\lambda \det(A)$.
3. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$: $\det(A)$ ne change pas.

2 Exercices

Exercice 1. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et $\vec{b} = (1, 1, 3)$.

1. Déterminer le déterminant de A.

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 - (1 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 2) \\ &= 6 + 4 + 12 - (6 + 6 + 8) \\ &= 2 \end{aligned}$$

   Ainsi la matrice est inversible.

2. Déterminer l'inverse de la matrice A.
   On procède par le pivot de Gauss-Jordan.

$$A|I_n = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\3&3&4&0&1&0\\1&2&2&0&0&1\end{array}\right)\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{\Longleftrightarrow}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&0&-2&-3&1&0\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\overset{L_2\leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&-2&-3&1&0\end{array}\right)$$

$$\overset{L_3\leftarrow -\frac{1}{2}L_3}{\Longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{array}\right)$$

$$\overset{L_1\leftarrow L_1-L_2-2L_3}{\Longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&-1\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&0&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

3. Trouver la solution unique de $A\vec{x}=\vec{b}$.
   On multiplie l'équation par A^{-1} à gauche et on obtient donc :

$$\begin{aligned}&A^{-1}A\vec{x}=A^{-1}\vec{b}\\\Longleftrightarrow\ &I_n\vec{x}=A^{-1}\vec{b}\\\Longleftrightarrow\ &\vec{x}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&0&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\\\Longleftrightarrow\ &\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exercice 2. Donner une forme paramétrique du plan

$$p=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|2x+y-3z=4\}$$

$$\begin{aligned}&2x+y-3z=4\\\Longleftrightarrow\ &2x=4-y+3z\\\Longleftrightarrow\ &x=2-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z\end{aligned}$$

Posons : $\begin{cases} y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$x = 2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2}\mu$$
$$\begin{pmatrix} x \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \equiv \vec{x}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$