Feuille 1 : Nombres complexes

Exercice 1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

a) $z = 4 + 5i$, b) $z = (-2 + 2i) + (5 + 3i)$, c) $z = (-3 - 7i)(1 - 2i)$,
d) $z = (4 + 5i)(5 + 3i)(1 - 2i)$, e) $z = \frac{4-3i}{5+2i}$, f) $z = \frac{(4-3i)(1-2i)}{7-3i}$,
g) $z = \frac{(7+6i)(-3-2i)}{2+i} + 4 + 6i$.

Exercice 2. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z = \frac{1+im}{2m+i(m^2-1)}$ pour $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer le conjugué des nombres complexes suivants en fonction de $Re(z)$ et $Im(z)$:

a) $z + 1$, b) $z^2 + 3i$, c) $\bar{z} + 2z$, d) $\bar{z} + z - i$,
e) $z^3 + 1$, f) $iz^2 - 3\bar{z}$, g) $z - \bar{z} + iz$, h) $z^2 - i\bar{z} + 4$.

Exercice 4.

1. Calculer le module des nombres complexes suivants :

   a) $z = 2 + 5i$, b) $z = -3 + 2i$, c) $z = (3 - 2i)(9 + i)$, d) $z = \frac{2+5i}{5-2i}$.

2. Exprimer le module des nombres complexes suivants à l'aide du module de z :

   a) $z\bar{z}$, b) $2z^2$, c) $\frac{2}{\bar{z}}$, d) $3\frac{\bar{z}^2}{z}$.

Exercice 5. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Établir la relation $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$ et en donner une interprétation géométrique.

Exercice 6.

1. Représenter les points d'affixes suivantes dans le plan $R = (O, i, j)$

   a) $z = 1 - i$, b) $\bar{z}$, c) $z + \bar{z}$, d) $z - \bar{z}$.

2. Représenter les vecteurs suivants dans le plan $R = (O, i, j)$

   a) v d'affixe $2 + i$, b) w d'affixe $-3 + 2i$, c) $v + w$, d) $2v - w$.

Exercice 7. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

a) $|1 - z| \leq \frac{1}{2}$ b) $\text{Re}(1 - z) \leq \frac{1}{2}$ c) $\text{Re}(iz) \leq \frac{1}{2}$ d) $\left|1 - \frac{1}{z}\right|^2 = 2$ e) $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2$

Exercice 8. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, puis $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. Linéariser $\sin^4(x)$ puis $\cos(x)\sin^4(x)$.

Exercice 9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } V_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

Exercice 10. 1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) $u = -3$, b) $v = 1 - i$, c) $w = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$, d) $z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$.

2. En déduire le module et un argument de uw et $\frac{z}{v}$.

Exercice 11. Soit $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

1. Calculer z^2, déterminer le module et un argument de z^2 et écrire z^2 sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de z.
3. En déduire une expression de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 12. 1. Donner la forme trigonométrique de $(1+i)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (utiliser la formule de Moivre).

2. En déduire une expression très simple de $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Exercice 13. Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n nombres complexes w vérifiant $w^n = z$. Ces nombres sont appelés les n racines n-ième de z.

1. Représenter dans le plan complexe les 6 racines 6-ième de 1 et les 4 racines 4-ième de -1.
2. Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer les $n-1$ racines du polynôme complexe $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}$.

Exercice 14. Déterminer l'ensemble des racines n-ièmes des nombres complexes suivants :

a) $z = e^{i\frac{3}{4}\pi}$ pour $n = 3$, b) $z = e^{i\frac{\pi}{5}}$ pour $n = 4$, c) $z = -1$ pour $n = 5$.

Exercice 15. 1. Déterminer les racines cubiques de 1 et les représenter dans le plan complexe.

2. On note $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
3. Exprimer les racines cubiques de 1 en fonction de j.

Exercice 16. 1. Donner les solutions complexes de $z^4 = 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 17. 1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $z = 7 + 24i$, b) $z = 9 + 40i$, c) $z = 1 + i$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$, b) $z^2 = 3 - 4i$.

Exercice 18. — Déterminer une racine carrée de $\Delta = 32 - 4i$.

— En déduire les solutions de l'équation $2z^2 - (2+6i)z - 8 + 6i = 0$.

Exercice 19. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $iz^2 + (1-5i)z - 2 + 6i = 0$, b) $(1+2i)z^2 - (9+3i)z + 10 - 5i = 0$,
c) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$. d) $z^3 + 3z - 2i = 0$,
e) $z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0$, f) $\bar{z}^7 = \frac{1}{z^2}$
g) $z^5 - z = 0$, h) $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.

Exercice 20. 1. Donner les applications de $\mathbb{C}$ qui représentent les transformations du plan suivantes.

a) La translation du vecteur d'affixe $-2 + i$.
b) L'homothétie de rapport 3 et de centre $1 + 2i$.
c) La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1.
d) La symétrie centrale du centre i.

2. Identifier les transformations suivantes dans le plan complexe .

a) $f_1 : z \mapsto z + 3 - 2i$. b) $f_2 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{7}} z$. c) $f_3 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{3}} z - 1$.

d) $f_4 : z \mapsto 3z - 5 + i$. e) $f_5 : z \mapsto 5z$. f) $f_6 : z \mapsto 3e^{i-\frac{2}{3}\pi} z$.

g) $f_7 : z \mapsto e^{i-\frac{2\pi}{5}} z + 2 - 3i$.

Exercice 21. Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| < 1$.

1. Montrer que $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$.
2. On notera $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ le disque unité et $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité. Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} D & \to & D \\ z & \mapsto & \frac{z+c}{1+\bar{c}z} \end{array}$$

est une bijection pour laquelle $f(C) = C$.

Exercice 22. Soit $f : x \mapsto \frac{z^2-1}{z(z+3)}$ définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-3, 0\}$. Calculer $f(1 - i)$et $f(1 + i)$.

Exercice 23. Soit $z = \frac{3}{\sqrt{3}+i}$. Calculer z^4.

Exercice 24. 1. Calculer $\cos^2(x)\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$.

2. Linéariser $\cos^4(x)$.

Exercice 25. 1. Donner les solutions complexes de $z^4 = 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Exercice 26. 1. Déterminer les quatre nombres complexes a, b, c et d différents de 1 qui sont solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^5 = 1$.

2. Montrer que pour tout nombre complexe z, on a $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d)$.

Exercice 27. Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = 0$$

Exercice 28. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{1}{2}z^6 + (1 + 3i)z^3 + 8 + 8i = 0$.

Exercice 29. On considère l'équation suivante :

$$z^4 - 3z^3 + (2 - i)z^2 + 3z - 3 + i = 0 \tag{E}$$

1. Montrer que l'équation (E) admet 2 solutions réelles.
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$

Exercice 30. On considère la fonction f suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z(1 - z) \end{array}$$

1. Déterminer les points fixes de f, c'est à dire résoudre $f(z) = z$.
2. Montrer que si $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$, alors $\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$.

Indication : on pourra remarquer que $z(1 - z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4}$.

Exercices du Chapitre 1 du livre qui pourraient être utiles pour s'entraîner :

— exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6 ;
— exercices 8, 9, 10, 11, 12 ;
— exercices 21, 22, 23, 24 ;
— exercices 30, 38.

Vous pouvez aborder aussi les autres exercices du livre : le plus exercices vous faites, les plus vous serez entraînés !