

Contrôle continu 4 – 25/04/2023

Exercice 1 (6 points)

On définit les polynômes

$$A(X) = X^5 + X^4 - X^3 - 3X^2 - 2 \quad \text{et} \quad B(X) = X^3 - 2X - 1.$$

- (i) Calculer la division euclidienne de A par B .
- (ii) En utilisant un théorème du cours, en déduire que A et B sont premiers entre eux.

Exercice 2 (12 points)

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ les polynômes définis par

$$P(X) = X^4 - 1 \quad \text{et} \quad Q(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2.$$

- (1) Décomposer P et Q en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
- (2) Utiliser la question précédente pour déterminer le $PGCD(P, Q)$.
- (3) Effectuer la division euclidienne de P par Q .
- (4) Trouver deux polynômes A et B tels que

$$PGCD(P, Q) = AP + BQ.$$

Exercice 3 (10 points)

Trouver le PGCD entre les polynômes P et Q donnés ci-dessous.

- (1) $P(X) = (X^2 - 1)^2 (X^2 + 5)^{37} (X - 2)^7 (X - 100)^3$,
 $Q(X) = (X^2 + 1) (X + 1)^4 (X - 2)^{10} (X + 3)^4 (X + 5)$.
- (2) $P(X) = -X^3 - X^2 + X + 1$,
 $Q(X) = X^4 - X^3 - 2X^2 + X + 1$
(suggestion : essayer de décomposer en facteurs irréductibles).
- (3) $P(X) = X^4 - X^3 - 2X^2 + X + 1$
 $Q(X) = X^3 + X^2 - X + 3$,
et trouver deux polynômes U et V tels que $PU + QV = PGCD(P, Q)$.