

### Contrôle continu 3 – 30/03/2023

#### Exercice 1 (4 points)

Trouver tous les polynômes  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  tels que :

- 1)  $P(X + 1) = (X^2 - 1)P(X - 1)$  ;
- 2)  $P(X^2 - 1) = (X + 1)P(X - 1)$ .

#### Exercice 2 (10 points)

On définit les polynômes

$$A(X) = X^5 - X^4 - X^3 - 2X - 2 \quad \text{et} \quad B(X) = X^2 - X - 2.$$

- (i) Calculer la division euclidienne de  $A$  par  $B$ .
- (ii)  $A$  et  $B$  sont-ils irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  ? Et dans  $\mathbb{R}[X]$  ? Motiver les réponses.
- (iii) Prouver (en utilisant un théorème du cours) que  $A$  a une racine réelle.

#### Exercice 4 (12 points)

On considère le polynôme défini par  $P(X) = X^5 - 2X^4 + \alpha X^3 - 2X^2 + X + \beta$ . On suppose que 0 est racine de  $P$ .

1. Déterminer  $\beta$ .
2. Maintenant, on suppose de plus que 1 est aussi une racine de  $P$ . Déterminer alors  $\alpha$ .
3. Montrer que 1 est une racine au moins double de  $P$ . Est-ce que 0 est racine double de  $P$  ? Justifier précisément les réponses.
4. Montrer que  $i$  est racine de  $P$ . En déduire l'ensemble des racines de  $P$ .
5. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .