Université Claude Bernard Lyon 1
Semestre de printemps 2022-2023
UE Algèbre 1-B

Prénom, NOM : *écrire ci-dessous*
....
Groupe TD : .....

Contrôle continu 2 – 07/03/2023

Exercice 1 (5 points)

Trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2+1) = (X-1)(X+1)P(X)$.

Exercice 2 (4 points)

Soient A, B et C trois polynômes appartenant à $\mathbb{C}[X]$.
Prouver l'implication suivante :

$$\big(A \mid B \quad \text{et} \quad B \mid C\big) \qquad \Longrightarrow \qquad A \mid C\,.$$

Exercice 3 (8 points)

(A) Donner les applications de $\mathbb{C}$ qui représentent les transformations du plan suivantes :
— l'homothétie de rapport -2 et de centre $1+3i$;
— la rotation de centre $1-i$ et d'angle $\pi/3$.

(B) Parmi les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ suivantes, reconnaître les similitudes directes et les identifier :

$$f(z) = 3\,, \qquad g(z) = z + 7i - 2\,, \qquad h(z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) z + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\,.$$

Exercice 4 (10 points)

1) (1.1) Résoudre l'équation $z^8 = 16$ dans $\mathbb{C}$.
(1.2) Parmi les solutions trouvées à la question précédente, identifier celles appartenant à $\mathbb{R}$ et celles appartenant à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (c'est-à-dire, celles complexes mais pas réelles).
(1.3) Parmi les solutions appartenant à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, identifier les couples formés par un nombre complexe et son conjugué.

2) On considère l'équation

(1) $$z^6 = 8i\,.$$

(2.1) Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de l'équation (1), c'est-à-dire $z^6 = 8i$. Calculer $\overline{z}^6$. Est-ce que $\overline{z}$ est une solution de (1) ? Justifier.
(2.2) Prouver que (1) n'a pas de solutions réelles (sans calcul explicite des solutions).
Indication : on pourra essayer de raisonner par l'absurde.