Université Claude Bernard Lyon 1
Semestre de printemps 2022-2023
UE Algèbre 1-B

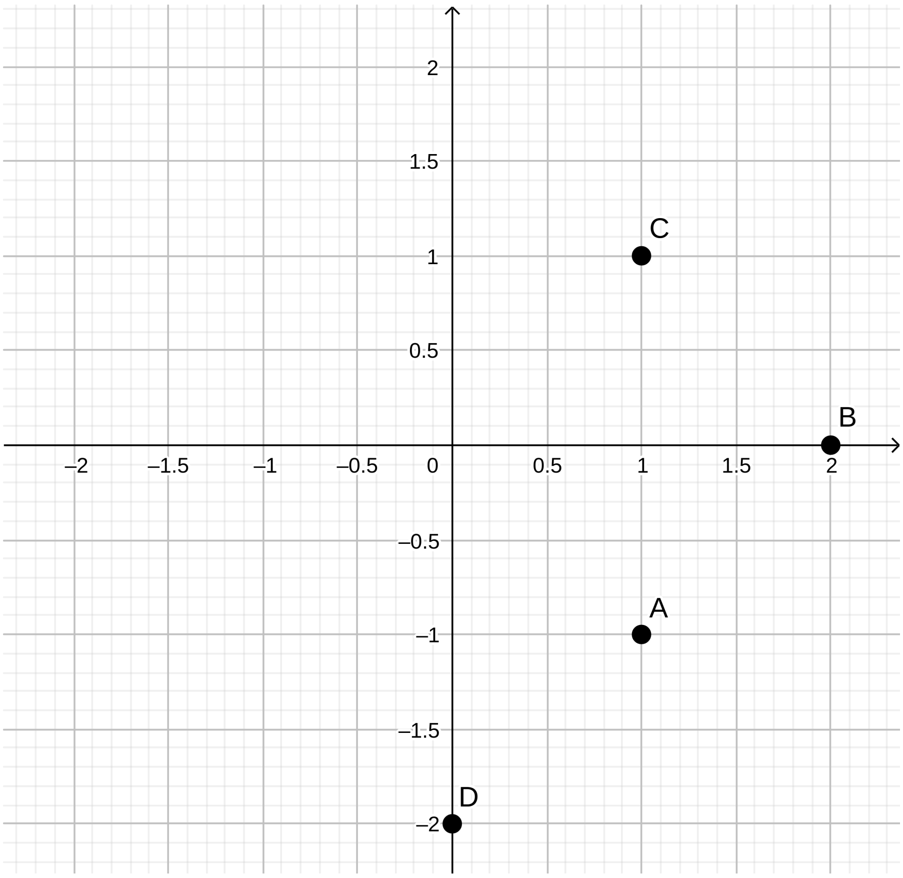
Prénom, NOM : *écrire ci-dessous*
....
Groupe TD : .....

Contrôle continu 1 – 09/02/2023

(sujet recto-verso)

Exercice 1 (7 points)

On considère le repère orthonormé suivant :



1. Donner les affixes des points A, B et D.
2. Donner le module et un argument de l'affixe du point C.
3. Placer les points E, F, G et H d'affixes respectives $-1+i$, $\overline{-1+i}$, $e^{i\pi}$ et $2e^{i\frac{\pi}{4}}$.
4. Placer les points I, J, K et L d'affixes respectives les racines 4^{ieme} de l'unité.

Correction

1. Les affixes des points A, B et D sont respectivement $1-i$, 2 et $-2i$.
2. L'affixe du point C a pour module $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ et $\dfrac{\pi}{4}$ en est un argument.

Exercice 2 (7 points)

Soit $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$.

1. (a) Donner le module et un argument de $1 + i\sqrt{3}$.
   (b) Donner le module et un argument de $1 + i$.
   (c) En déduire le module et un argument de z puis sa forme trigonométrique.
2. En identifiant par le calcul partie réelle et partie imaginaire de z, donner sa forme algébrique.
3. A partir des questions précédentes, donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Correction

1. a) On a :

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Donc un argument de $1 + i\sqrt{3}$ est $\dfrac{\pi}{3}$, et son module est 2. Si l'on ne voit pas la forme exponentielle directement, il est possible de calculer d'abord le module avec la formule du cours $|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$, puis de factoriser par ce module pour voir apparaître $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ que l'on doit être capable de reconnaître comme étant $\cos(\dfrac{\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{\pi}{3})$

b) De même on a :

$$1 + i = \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Et donc un argument de $1 + i$ est $\dfrac{\pi}{4}$, et son module est $\sqrt{2}$.

c) D'après les questions précédentes, on a

$$z = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

et l'on a directement sa forme trigonométrique. Une autre façon de voir les choses (plus en phase avec la manière dont la question était posée) est de dire que

$$|z| = \frac{|1 + i\sqrt{3}|}{|1 + i|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

et que d'autre part un argument d'un quotient de nombres complexes est donné par la différence entre un argument du numérateur et un argument du dénominateur, d'où $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$ est un argument de z. De ces deux informations on obtient bien à nouveau $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

2. Ici on n'a qu'à faire le calcul en multipliant au numérateur et au dénominateur par $1 - i$, le conjugué du dénominateur, afin d'éliminer les complexes au dénominateur :

$$z = \frac{(1 + i\sqrt{3}) \times (1 - i)}{(1 + i) \times (1 - i)} = \frac{1 - i^2\sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)}{|1 + i|^2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Ceci est la forme algébrique de z et on lit que sa partie réelle vaut $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ et que sa partie imaginaire vaut $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

3. On a d'une part
$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})\right)$$
et d'autre part
$$z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$
Par unicité de la forme algébrique on en déduit
$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$
et
$$\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 3 (10 points)

1. a) Déterminer les racines carrées de $8-6i$.
   b) Trouver les deux solutions de l'équation suivante : $(2+2i)z^2 + (1+i)z + i$.
2. a) Mettre le complexe $2-2\sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique
   b) En déduire ses racines carrées.
   c) Étant donnée l'équation $z^2 + 2z - 1 + 2\sqrt{3}i = 0$, effectuer le changement de variable $y = z+1$ et écrire une équation pour y. Déduire des questions précédentes les solutions y_1 et y_2 de l'équation en y. Déterminer les solutions z_1 et z_2 de l'équation de départ.

Correction

1. a) On cherche $\omega = x+iy$ tel que $\omega^2 = 8-6i$. On a $\omega^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ donc
$$\omega^2 = 8-6i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \end{cases}$$
   On ajoute à ce système l'équation provenant de l'égalité des modules pour faciliter les calculs : $|\omega^2| = |\omega|^2 = x^2+y^2$ et $|8-6i| = \sqrt{8^2+(-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$. On a :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \\ x^2+y^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ 2y^2 = 2 \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow (x = 3 \text{ et } y = -1) \text{ ou } (x = -3 \text{ et } y = 1)$$
   Les racines de $8-6i$ sont donc $\omega_1 = 3-i$ et $\omega_2 = -3+i$.

b) Calculons le discriminant de ce trinôme du second degré :

$$\Delta = (1+i)^2 - 4(2+2i)i = 2i - 8i - 8i^2 = 8 - 6i$$

On connaît par la question précédente les racines ω_1 et ω_2 de Δ, et les solutions de l'équation sont donc

$$z_1 = \frac{-(1+i)-\omega_1}{2(2+2i)} = \frac{-4}{2(2+2i)} = \frac{-4(2-2i)}{2(2+2i)(2-2i)} = \frac{-8+8i}{2\times|2+2i|^2} = \frac{-8+8i}{16} = -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$$

et

$$z_2 = \frac{-(1+i)-\omega_2}{2(2+2i)} = \frac{2-2i}{2(2+2i)} = \frac{(2-2i)^2}{2(2+2i)(2-2i)} = \frac{-8i}{2\times|2+2i|^2} = \frac{-8i}{16} = -\frac{i}{2}$$

2. a) Comme précédemment :

$$2-2\sqrt{3}i = 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

b) Les racines carrées d'un complexe sous forme exponentielle sont très faciles à trouver : il suffit de prendre la racine carrée du module et de diviser l'argument par 2 pour en trouver une, et l'autre sera son opposé. Les racines de $2-2\sqrt{3}i$ sont donc $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $-2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

c) Poser $y = z+1$ revient à poser $z = y-1$. On a alors

$$\begin{aligned} z^2+2z-1+2\sqrt{3}i = 0 &\iff (y-1)^2+2(y-1)-1+2\sqrt{3}i = 0 \\ &\iff y^2-2y+1+2y-2-1+2\sqrt{3}i = 0 \\ &\iff y^2 = 2-2\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Les solutions de cette dernière équation en y sont, par les questions précédentes, $y_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $y_2 = -2e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Les solutions de l'équation en z s'obtiennent via la correspondance $z = y-1$ et sont $z_1 = y_1 - 1 = \sqrt{3}-1-i$ et $z_2 = y_2 - 1 = -\sqrt{3}-1+i$.