Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2021-2022
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 11 mai 2022

Devoir surveillé n°4

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1 On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f(x, y, z) = (x + y - z, -3x - 3y + 3z, -2x - 2y + 2z)\,.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique.
3. Déterminer une base de $Ker(f)$.
4. Déterminer une base de $Im(f)$.
5. Montrer que $Im(f) \subset Ker(f)$. A-t-on $\mathbb{R}^3 = Ker(f) \oplus Im(f)$?
6. Déduire de ce qui précède que $M^2 = 0$.

Exercice 2 Le but de cet exercice est de déterminer les solutions définies sur $I =]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$\forall t \in I\,, \quad t^2 f'' - 2tf' + (2 - t^2)f = 3t^3(t + 1)e^{2t}\,. \tag{A}$$

On s'intéresse dans un premier temps à l'équation différentielle suivante :

$$\forall t \in I\,, \quad z'' - z = 3(t + 1)e^{2t}\,. \tag{B}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (B).
2. Déterminer les solutions de (B).
3. Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$. Montrer que f est solution de (A) si et seulement si la fonction z définie par $z(t) = f(t)/t$ pour tout $t \in I$ est solution de (B).
4. En déduire les solutions de (A).

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On considère l'application $f : E \to E$ définie pour tout $P \in E$ par :

$$f(P) = P + (1 - X)P'\,.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. (a) Résoudre l'équation différentielle $(1 - x)y' + y = 0$ sur $]1, +\infty[$.
   (b) En déduire que $Ker(f) = Vect(1 - X)$.
3. (a) Donner la dimension de $Im(f)$.
   (b) Calculer $f(X^k)$ pour $k = 0, \cdots, n$, et en déduire une base de $Im(f)$.
4. On suppose à présent $n = 4$. Donner la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 4 Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère $H = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad , \quad x = y = z = t\big\}$. Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ? Justifier.