Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2021-2022
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 11 mai 2022

Devoir surveillé n°4

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1 On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f(x, y, z) = (x + y - z, -3x - 3y + 3z, -2x - 2y + 2z)\,.$$

1. Montrer que f est linéaire.
   Il s'agit d'établir que $f(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + \lambda f(\mathbf{v})$ pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dans $\mathbb{R}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique.
   La matrice dans la base canonique est :
   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
3. Déterminer une base de $Ker(f)$.
   On a $f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0$, d'où l'on déduit $Ker(u) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
4. Déterminer une base de $Im(f)$.
   Les vecteurs colonnes de M étant liés, on a immédiatement $Im(f) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.
5. Montrer que $Im(f) \subset Ker(f)$. A-t-on $\mathbb{R}^3 = Ker(f) \oplus Im(f)$?
   On remarque que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ satisfait l'équation du plan $Ker(f)$, et donc $Im(f) \subset Ker(f)$.
   L'intersection de ces deux ensembles n'étant pas réduite au vecteur nul, ils ne peuvent être en somme directe.
6. Déduire de ce qui précède que $M^2 = 0$.
   Il résulte de l'inclusion $Im(f) \subset Ker(f)$ établie précédemment que $f(u) \in Ker(f)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, et donc $f(f(u)) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$. Ainsi f^2 est l'application nulle, et sa matrice dans la base canonique M^2 l'est aussi.

Exercice 2 Le but de cet exercice est de déterminer les solutions définies sur $I =]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$\forall t \in I\,, \quad t^2 f'' - 2tf' + (2 - t^2)f = 3t^3(t + 1)e^{2t}\,. \tag{A}$$

On s'intéresse dans un premier temps à l'équation différentielle suivante :

$$\forall t \in I\,, \quad z'' - z = 3(t + 1)e^{2t}\,. \tag{B}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (B).

2. Déterminer les solutions de (B).

On s'intéresse dans un premier temps au problème homogène (H) : $z'' - z = 0$ sur I, dont le polynôme caractéristique associé est $P(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. Les solutions s'écrivent donc sous la forme :

$$h(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{t} \quad , \quad \forall t \in I\,,$$

avec (λ, μ) un couple de constantes réelles.
Par suite, en cherchant une solution particulière sous la forme $z_p(t) = p(t)e^{2t}$ où p est un polynôme, on trouve, après identification : $z_p(t) = (t - 1/3)e^{2t}$. Les solutions de (B) sont donc les fonctions définies par :

$$z(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{t} + (t - 1/3)e^{2t} \quad , \quad \forall t \in I\,.$$

3. Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$. Montrer que f est solution de (A) si et seulement si la fonction z définie par $z(t) = f(t)/t$ pour tout $t \in I$ est solution de (B) :

On commence par remarquer que $z \in \mathcal{C}^2(I)$, et on a, pour tout t dans I :

$$\begin{aligned} f'(t) &= tz'(t) + z(t) \\ f''(t) &= tz''(t) + 2z'(t) \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de (E)} &\Leftrightarrow \forall t \in I\,, \quad t^2 f''(t) - 2tf'(t) + (2 - t^2)f(t) = 3t^3(t+1)e^{2t} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in I\,, \quad t^2(tz''(t) + 2z'(t)) - 2t(tz'(t) + z(t)) + (2 - t^2)tz(t) = 3t^3(t+1)e^{2t} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in I\,, \quad t^3 z''(t) - t^3 z(t) = 3t^3(t+1)e^{2t} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in I\,, \quad z''(t) - z(t) = 3(t+1)e^{2t} \end{aligned}$$

4. En déduire les solutions de (A).

Les solutions de (A) sont les fonctions définies par :

$$f(t) = \lambda te^{-t} + \mu te^{t} + t(t - 1/3)e^{2t} \quad , \quad \forall t \in I\,.$$

Exercice 3 Soit $n \in \ N$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On considère l'application $f : E \to E$ définie pour tout $P \in E$ par :

$$f(P) = P + (1 - X)P'\,.$$

1. Montrer que f est linéaire.

Pour tout P, Q dans E et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q) + (1 - X)(P + \lambda Q)' \\ &= P + (1 - X)P' + \lambda\left(Q + (1 - X)Q'\right) \\ &= f(P) + \lambda f(Q)\,. \end{aligned}$$

2. (a) Résoudre l'équation différentielle $(1 - x)y' + y = 0$ sur $]1, +\infty[$.
   (b) En déduire que $Ker(f) = Vect(1 - X)$.

Soit $P \in Ker(f)$. P est donc solution de l'équation différentielle $P + (1 - X)P' = 0$, et s'écrit sous la forme $P(X) = c(1 - X)$ avec c une constante réelle. Ainsi $Ker(f) = Vect(1 - X)$, c'est un sous espace vectoriel de E de dimension 1.

3. (a) Donner la dimension de $Im(f)$.

   le théorème du rang donne $dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$, d'où l'on tire $dim(Im(f)) = n$.

(b) Calculer $f(X^k)$ pour $k = 0, \cdots, n$, et en déduire une base de $Im(f)$.

Le calcul donne $f(X^k) = X^k + k(1-X)X^{k-1} = (1-k)X^k + kX^{k-1}$ pour $k = 0, \cdots, n$. On remarque alors que $f(1) = f(X) = 1$ et que pour tout $k \geqslant 2$, $f(X^k)$ est un polynôme de degré k. La famille $\mathcal{B} = \{f(X), \cdots, f(X^n)\}$ est libre, car les degrés des polynômes qui la constituent sont distincts. La famille $\mathcal{B}$ étant libre et constituée de n éléments de $Im(f)$, c'est une base de $Im(f)$.

4. On suppose à présent $n = 4$. Donner la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 4 Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère $H = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad , \quad x = y = z = t\big\}$. Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ? Justifier.

On a $H = Vect(1, 1, 1, 1)$, donc H est de dimension 1. Si H était le noyau d'un application linéaire f de E dans F, alors par le théorème du rang on aurait

$$rg(f) = dim(\mathbb{R}^4) - dim(Ker(f)) = 3\,.$$

Ceci qui est exclu car f est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, qui est de dimension 2 (et donc $rg(f) \leqslant 2$).