Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2021-2022

Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques — 23 mars 2022

Corrigé du devoir surveillé 2

Exercice 1

1. On a $F(X) = \frac{X^2+11}{(X-2)(X+1)(X^2+1)}$. Par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe des uniques réels a, b, c et d tels que
$$F(X) = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}.$$
On détermine a en évaluant $(X-2)F(X)$ en 2 : $a = (4+11)/(3\times 5) = 1$.
On détermine b en évaluant $(X+1)F(X)$ en -1 : $b = 12/(-3\times 2) = -2$.
On calcule c et d en évaluant $(X^2+1)F(X)$ en i :
$$ci + d = 10/((i-2)(i+1)) = 10/(-3-i) = 10\times(-3+i)/10 = -3+i \text{ d'où } c = 1 \text{ et } d = -3.$$
On peut également obtenir c avec la limite de $XF(X)$ en l'infini, et d en évaluant $F(X)$ en 0.
Ainsi,
$$F(X) = \frac{1}{X-2} - \frac{2}{X+1} + \frac{X-3}{X^2+1}.$$

2. D'après la question précédente,
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+11}{(x^2-x-2)(x^2+1)}\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} - \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x+1} + \int \frac{x-3}{x^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \ln(|x-2|) - 2\ln(|x+1|) + \frac{\ln(x^2+1)}{2} - 3\arctan x + C, \text{ avec } C\in\mathbf{R}.\end{aligned}$$
L'ensemble des primitives de la fonction f est donc constitué des fonctions de la forme
$$g :]-1,2[\longrightarrow \mathbf{R},\ x \mapsto \ln\left(\frac{(2-x)\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^2}\right) - 3\arctan x + C \text{ où } C \text{ est une constante réelle.}$$

Exercice 2

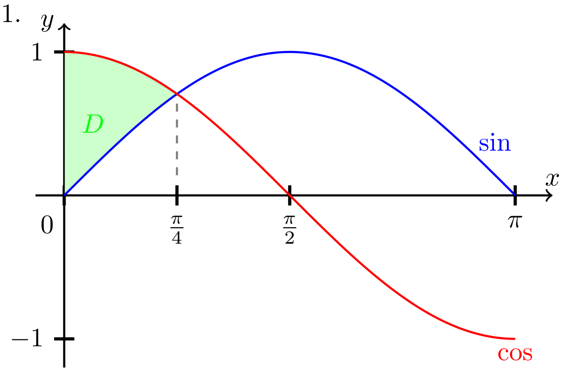
1. Intégrons par parties en posant $u(t) = \ln t$ et $v(t) = t^3/3$:
$$\int_1^{\sqrt{2}} t^2 \ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\ln t\right]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^3}{3t}\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}{3} - \left[\frac{t^3}{9}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\ln 2}{3} - \frac{2\sqrt{2}-1}{9} = \frac{1+\sqrt{2}(3\ln 2 - 2)}{9}.$$

2. En posant $t = \sqrt{1+x}$, on a $x = t^2-1$ et $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Comme $x \mapsto \ln(1+x)\sqrt{x+1}$ est continue sur $[0,1]$, et la fonction $\varphi : [1,\sqrt{2}] \to [0,1], t \mapsto t^2-1$ est C^1 avec $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(\sqrt{2}) = 1$, on peut appliquer le théorème de changement de variables, ce qui donne :
$$\int_0^1 \ln(1+x)\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} \ln(t^2)\times t\times 2t\,\mathrm{d}t = 4\int_1^{\sqrt{2}} t^2\ln t\,\mathrm{d}t = \frac{4}{9}\Big(1+\sqrt{2}(3\ln 2 - 2)\Big).$$

Exercice 3

On note $D = \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \text{ et } \sin x \leqslant y \leqslant \cos x\right\}$.

1.



2. Les fonctions sinus et cosinus sont respectivement strictement croissante et strictement décroissante sur l'intervalle $[0,\pi/2]$. Leurs courbes représentatives se coupent en $x = \pi/4$. Ainsi, pour $x \in [0,\pi/2]$, $\sin x \leqslant \cos x$ si et seulement si $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$. On en déduit que l'aire de D vaut $\int_0^{\pi/4}\cos x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/4}\sin x\,\mathrm{d}x$. Or, $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - 1 = \sqrt{2}-1$.
Ainsi, l'aire de D vaut $\sqrt{2}-1$.

Exercice 4 Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x$.

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x)^0 \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 1 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \,\mathrm{d}x = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$ et
$I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sin(2\pi/2) - \sin 0}{4} = \frac{\pi}{4}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction $x \mapsto (\cos x)^n$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, \pi/2]$. Cela entraîne, par un résultat du cours, que $I_n > 0$.

   (b) Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$, donc $(\cos x)^{n+1} \leqslant (\cos x)^n$. Par monotonie de l'intégrale, on en déduit que $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est donc décroissante.

   (c) La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente. De plus sa limite ℓ vérifie $0 \leqslant \ell \leqslant I_1$, d'où $\ell \in [0,1]$.

3. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Intégrons par parties I_{n+2} en posant $u(x) = (\cos x)^{n+1}$ et $v(x) = \sin x$:

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n+1} \cos x \,\mathrm{d}x = \Big[(\cos x)^{n+1} \sin x\Big]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \sin^2 x \,\mathrm{d}x \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n (1 - \cos^2 x) \,\mathrm{d}x = (n+1) \left(\int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n+2} \,\mathrm{d}x \right) \\ &= (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}. \end{aligned}$$

   D'où, $(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$.

   (b) Montrons cette proposition par récurrence.
   Initialisation : pour $n = 0$, on a $(n+1) I_{n+1} I_n = I_1 I_0 = 1 \times \pi/2 = \pi/2$.
   Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que $(n+1) I_{n+1} I_n = \pi/2$. Alors, par la question précédente, puis l'hypothèse de récurrence, on a

$$((n+1)+1) I_{(n+1)+1} I_{n+1} = (n+2) I_{n+2} I_{n+1} = (n+1) I_n I_{n+1} = (n+1) I_{n+1} I_n = \pi/2.$$

   (c) Montrons maintenant que $\ell = 0$ par l'absurde : supposons $\ell \neq 0$. Alors, comme les suites (I_n) et (I_{n+1}) convergent toutes deux vers ℓ, la suite $\big((n+1) I_{n+1} I_n\big)$ diverge, ce qui contredit le résultat précédent.

4. (a) Comme la suite (I_n) est une suite décroissante de termes strictement positifs, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_{n+2}/I_n \leqslant I_{n+1}/I_n \leqslant 1$. Par 3(a), ces inégalités sont équivalentes à

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1.$$

   La suite $((n+1)/(n+2))$ tend vers 1, c'est donc également le cas de (I_{n+1}/I_n).

   (b) Par la question précédente, $I_n \sim I_{n+1}$ et donc $n(I_n)^2 \sim (n+1) I_{n+1} I_n$. Par 3(b), cela signifie que la suite $\big(n(I_n)^2\big)$ converge vers $\pi/2$.

5. (a) Soit $\varepsilon \in]0, \pi/2[$ et $n \in \mathbf{N}$.

      i. Pour tout $x \in [0, \varepsilon]$, $0 \leqslant (\cos x)^n \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\varepsilon} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\varepsilon} 1 \,\mathrm{d}x = \varepsilon$.

      ii. La décroissance du cosinus sur $[\varepsilon, \pi/2]$ entraîne que pour tout $x \in [\varepsilon, \pi/2]$, $0 \leqslant \cos x \leqslant \cos \varepsilon$. Ainsi, pour tout $x \in [\varepsilon, \pi/2]$, $0 \leqslant (\cos x)^n \leqslant (\cos \varepsilon)^n$, et donc

$$0 \leqslant \int_{\varepsilon}^{\pi/2} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\varepsilon}^{\pi/2} (\cos \varepsilon)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2} (\cos \varepsilon)^n.$$

   (b) Soit $\varepsilon \in]0, \pi/2[$. Alors $0 \leqslant \cos \varepsilon < 1$ et la suite $\left(\dfrac{\pi}{2}(\cos \varepsilon)^n\right)$ converge vers 0. Il existe donc un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{\pi}{2}(\cos \varepsilon)^n \leqslant \varepsilon$. On obtient ainsi, en utilisant la question précédente, que

$$\forall n \geqslant N,\ 0 \leqslant I_n = \int_0^{\varepsilon} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\pi/2} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon + \frac{\pi}{2} (\cos \varepsilon)^n \leqslant 2\varepsilon.$$

   On a donc montré que $\forall \varepsilon \in]0, \pi/2[,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N,\ |I_n| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui signifie que la suite (I_n) converge vers 0.