Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2021-2022
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 23 mars 2022

Devoir surveillé 2

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ la fraction rationnelle suivante :
$$F(X) = \frac{X^2+11}{(X^2-X-2)(X^2+1)}.$$
2. En déduire l'ensemble des primitives de la fonction $f :]-1,2[\longrightarrow \mathbf{R}$ définie pour $x \in]-1,2[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+11}{(x^2-x-2)(x^2+1)}$.

Exercice 2

1. Calculer $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} t^2 \ln t \, \mathrm{d}t$.
2. En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{1+x}$ calculer $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3 On note $D = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \text{ et } \sin x \leqslant y \leqslant \cos x\big\}$.

1. Représenter graphiquement les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $[0,\pi]$, ainsi que D.
2. Montrer que l'aire de D vaut $\sqrt{2}-1$.

Exercice 4 Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.

   Indication : pour calculer I_2, on pourra utiliser la formule trigonométrique $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.
2. (a) Justifier rapidement (en utilisant un résultat du cours) que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n > 0$.
   (b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
   (c) En déduire que la suite (I_n) converge vers un réel $\ell \in [0,1]$.
3. (a) En intégrant par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.
   (c) Montrer que $\ell = 0$.
4. En utilisant les questions précédentes :
   (a) Montrer que la suite (I_{n+1}/I_n) converge vers 1.
   (b) En déduire que la suite $\big(n(I_n)^2\big)$ converge vers $\pi/2$.
5. Le but de cette dernière question est de montrer par une méthode plus directe que la suite (I_n) converge vers 0 :
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon \in]0,\pi/2[$ et tout $n \in \mathbf{N}$ on a :
      i. $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\varepsilon} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon$;
      ii. $0 \leqslant \displaystyle\int_{\varepsilon}^{\pi/2} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}(\cos\varepsilon)^n$.
   (b) Conclure.